

# **Beitrag zur Stabilitätsuntersuchung von Strukturen mit räumlich korrelierten geometrischen Imperfektionen**

Dissertation  
zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor-Ingenieur

an der Fakultät Bauingenieurwesen  
der Bauhaus-Universität Weimar

YORK SCHORLING

Gutachter: PROF. DR. CHRISTIAN BUCHER  
PROF. DR. FRANK WERNER  
PROF. DR. PETER OSTERRIEDER

Disputation: Weimar, 9. Juni 1997

## Kurzfassung

Geometrische Imperfektionen haben bei Stabilitätsproblemen häufig einen so großen Einfluß auf das Tragverhalten, daß eine Bemessung nach der klassischen Stabilitätstheorie nicht möglich ist. Gängige Bemessungskonzepte orientieren sich an Fraktilwerten experimentell ermittelter Beullasten. Für Strukturen, bei denen das Gewicht für die Nutzung von entscheidender Bedeutung ist, wird aus wirtschaftlichen Gründen ein probabilistisches Maß zur Beurteilung der Sicherheit gefordert, daß mit Hilfe der Zuverlässigkeitstheorie bestimmt werden kann. Für die probabilistische Beschreibung der geometrischen Imperfektionen bietet sich in Zusammenhang mit der Finite Elemente Methode eine Darstellung durch skalare Ortsdiskretisierte Zufallsfelder an. Ausgangspunkt der Berechnung ist eine Entkopplung der Zufallsvariablen durch eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix. Die Eigenvektoren entsprechen Imperfektionsformen, die Eigenwerte Varianzen der Amplituden. Somit werden Imperfektionsformen, denen ein probabilistisches Gewicht zugeordnet ist, auf systematische Weise formuliert. Um die Versagenswahrscheinlichkeit mit einem Interaktionsmodell der diskreten, unabhängigen Zufallsvariablen zu bestimmen, muß das stochastische Problem im Wahrscheinlichkeitsbereich, der für die Bemessung relevant ist, mit wenigen entscheidenden Zufallsvariablen dargestellt werden können. Diesbezüglich wird eine strukturellmechanisch orientierte Sensitivitätsanalyse, die auf den Imperfektionsgesetzen von KOITER beruht, diskutiert. Für die wichtigsten Zufallsvariablen erfolgen die Grenzzustandsberechnungen am imperfekten System durch nichtlineare Traglastberechnungen. Es zeigte sich, daß die Imperfektionsform am Bemessungspunkt unabhängig vom Lastniveau gerade der Beulform entspricht, wenn diese merklich im Imperfektionsfeld enthalten ist. In solchen Fällen üben Imperfektionsformen in der Beulform "Resonanz"effekte aus, die für eine Reduktion des stochastischen Problems auf wenige Zufallsvariablen genutzt werden können. Wenn die Beulform im Imperfektionsfeld einen untergeordneten Beitrag liefert, werden diese "Resonanz"erscheinungen nicht beobachtet. Eine Reduktion des stochastischen Problems auf wenige Zufallsvariable erscheint in diesen Fällen unter den gegebenen Randbedingungen nicht möglich.

## Abstract

Geometrical imperfections often strongly influence the stability behaviour of structures. Though geometrical imperfections, which arise during the construction of the structure, are usually of stochastic nature their consideration within the design process is still based on deterministic methods. Only some imperfection shapes stemming from the experience of the designing engineer are considered. Especially weight sensitive structures require a reliability based design philosophy. As geometrical imperfections can be interpreted as randomly spatially distributed fluctuations with respect to a perfect structure, a random field model seems most promising. In context with the finite element method a nodal discretization is chosen for the representation of the random field. A spectral decomposition of the covariance matrix, enables to formulate independent probabilistically weighted imperfection shapes, whose effect may be analyzed by means of structural mechanics. Reliability calculations with procedures such as the response surface method require the reduction of the random variable space. In this context KOTTER's imperfections laws are discussed with respect to the ability to identify the most important random variables. The limit states for these variables are then obtained with nonlinear computations at the imperfect system. The design point (*beta* point) indicates the imperfection shape with the highest influence on the failure probability. Examples proved that the most important imperfection shape in probabilistic sense is - independent of the load level - identical to the buckling shape if the buckling shapes are sufficiently present in the random field. In this case a projection of the random field on the buckling vectors leads to a very efficient probabilistic description of the structural imperfection behaviour. In contrast if the buckling shapes don't occur in the random field the structure shows a "wide bande" behaviour. Consequently a reduction of the sample space and the application of an interaction model is then not feasible for the determination of the failure probability.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Strukturmechanik der Bauhaus - Universität Weimar.

Ich möchte mich ganz besonders bei Herrn PROF. DR. CHRISTIAN BUCHER für die zahlreichen Anregungen und Diskussion bedanken. Das ausgesprochen positive Arbeitsklima am Institut für Strukturmechanik der Universität Weimar hat zweifellos stark zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Hierfür möchte ich auch allen Kolleginnen und Kollegen des Instituts nochmals sehr herzlich meinen Dank aussprechen. Schließlich gebührt mein Dank Herrn PROF. DR. FRANK WERNER und Herrn PROFESSOR DR. PETER OSTERRIEDER für die wertvollen Hinweise und die Begutachtung der Arbeit.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	1
1.2	Berechnungsverfahren . . . . .	3
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Probabilistisches Modell</b>	<b>7</b>
2.1	Einführung . . . . .	7
2.2	Zufallsfelder . . . . .	9
2.2.1	Eigenschaften von Zufallsfeldern . . . . .	9
2.2.2	Modellierung von Zufallsfeldern . . . . .	10
2.2.3	Bedingte Zufallsfelder . . . . .	12
2.2.4	Transformation in den unkorrelierten Raum . . . . .	13
2.2.5	Projektion der Kovarianzmatrix in einen Unterraum . . . . .	16
2.3	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	17
2.3.1	Approximation der Grenzzustandsfunktion . . . . .	18
2.3.2	Näherungsmethode 1. Ordnung (FORM) . . . . .	19
2.3.3	Monte Carlo Simulation . . . . .	20
2.3.4	Importance Sampling Strategien . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Stabilitätsberechnung für perfekte und imperfekte Systeme</b>	<b>23</b>
3.1	Einführung . . . . .	23

3.2	Singuläre Punkte . . . . .	25
3.3	Asymptotisches Nachbeulverhalten . . . . .	27
3.3.1	Verzweigungsbeziehung für Einfachverzweigungen . . . . .	28
3.3.2	Asymmetrische Verzweigung . . . . .	30
3.3.3	Symmetrische Verzweigung . . . . .	31
3.4	Asymptotische Imperfektionsempfindlichkeit . . . . .	33
3.4.1	Grundlagen zur Herleitung der Imperfektionsgesetze . . . . .	34
3.4.2	Durchschlagsprobleme . . . . .	35
3.4.3	Asymmetrische Verzweigungen . . . . .	36
3.4.4	Symmetrische Verzweigungen . . . . .	38
3.5	Mehrfachverzweigungen . . . . .	39
3.5.1	Unsymmetrische Verzweigungen . . . . .	40
3.5.2	Symmetrische Verzweigung . . . . .	41
3.6	Gleichgewicht und Pfadverfolgung . . . . .	43
3.6.1	Prädiktorschritt . . . . .	44
3.6.2	Korrektoriterationen . . . . .	45
3.7	Bestimmung singulärer Punkte . . . . .	48
3.7.1	Das Indifferenzenverfahren . . . . .	48
3.7.2	Kritische Punkte mit Hilfe von Pfadverfolgung und be- gleitenden Maßnahmen . . . . .	49
3.7.3	Direkte Berechnung singulärer Punkte . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Software und numerische Umsetzung</b>	<b>53</b>
4.1	<u>Slang</u> - the Structural Language . . . . .	53
4.1.1	FE Daten-Verwaltung . . . . .	54
4.1.2	Lineare Algebra . . . . .	54
4.1.3	Probabilistische Modellierung . . . . .	55
4.2	Grundlagen . . . . .	56

4.2.1	Platten-Membran Element SHELL3N . . . . .	60
4.3	Behandlung von Netzsingularitäten . . . . .	66
<b>5</b>	<b>Beispiele</b>	<b>68</b>
5.1	Imperfekter Bogen unter Einzellast . . . . .	69
5.1.1	Asymptotisches Stabilitätsverhalten . . . . .	70
5.1.2	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	71
5.2	Rotationssymmetrisches Stabtragwerk . . . . .	77
5.2.1	Asymptotisches Stabilitätsverhalten . . . . .	78
5.2.2	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	82
5.3	Mit Stringern verstärkte Schale . . . . .	85
5.3.1	Imperfektionsmodell . . . . .	86
5.3.2	Asymptotisches Stabilitätsverhalten . . . . .	87
5.3.3	Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit . . . . .	89
5.4	Diskussion der Beispiele . . . . .	93
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>96</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>98</b>
<b>A</b>	<b>Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix</b>	<b>106</b>
<b>B</b>	<b>Unterraum Iteration zur Eigenwertberechnung</b>	<b>109</b>
<b>C</b>	<b>Beispiele zum Element SHELL3N</b>	<b>113</b>
<b>D</b>	<b>Beulanalyse einer Eisenbahnbrücke</b>	<b>117</b>

# Verzeichnis der wichtigsten verwendeten Symbole

## Probabilistisches Modell

$a, b_i, c_{ij}$	Koeffizienten eines Polynoms in $\mathbf{R}^n$
$\mathbf{C}_{xx}$	Kovarianzmatrix
$E[.]$	Erwartungswertoperator
$f(.)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$g(.)$	Grenzzustandsfunktion
$G$	Richtungsableitungen der Grenzzustandsfunktion
$H(.)$	Zufallsfeld
$I(.)$	Indikatorfunktion
$l_H$	Korrelationslänge
$p_f$	Versagenswahrscheinlichkeit
$Q$	Qualitätsmaß zur Darstellung eines Zufallsfeldes
$R_{HH}(.)$	Korrelationsfunktion
$\mathbf{X}$	Zufallsvariablenvektor im Originalraum
$\mathbf{Y}$	Zufallsvariablenvektor im Standardnormalraum
$\mathbf{y}^*$	Realisation von $\mathbf{Y}$ am Bemessungspunkt
$\alpha$	Vektor der Richtungskosinus
$\beta$	Sicherheitsabstand
$\Phi$	Summenfunktion der Standardnormalverteilung
$\Psi$	Eigenvektoren der Kovarianzmatrix
$\sigma$	Standardabweichung

## Stabilitätsberechnung für perfekte und imperfekte Systeme

$a, b, c, e, f$	Koeffizienten zur Ableitung der Imperfektionsgesetze
$c$	Faktor für Prädiktorschritt



$f(\cdot)$	Nebenbedingung bei Pfadverfolgung
<b>G</b>	Gleichgewichtsbedingung am System
<b>K</b>	Systemsteifigkeitsmatrix
<b>P</b>	Lastvektor des Systems
<b>R</b>	Rückstellkräfte am System
<b>S</b>	Singularitätsbedingung am System
$t$	Pfadparameter
<b>U</b>	Verschiebungsvektor des Systems
<b>Z</b>	generalisierte Koordinaten
$\alpha$	skalarer Faktor
$\beta$	Imperfektionsamplitude
$\lambda$	Lastfaktor
$\mu$	Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix
$\Phi$	Eigenvektoren der Steifigkeitsmatrix

## Software und numerische Umsetzung

$\mathbf{A}^e$	Matrix der Deformationsgradienten
$\mathbf{B}^e$	Matrix der Dehnungsinkremente
$\mathbf{b}_{xx}^e, \mathbf{b}_{xy}^e, \mathbf{b}_{yy}^e$	Hilfsvektoren zur Formulierung der Elementmatrizen
$\mathbf{C}_{xx}^e, \mathbf{C}_{xy}^e, \mathbf{C}_{yy}^e$	Hilfsmatrizen zur Formulierung der Elementmatrizen
<b>D</b>	Materialmatrix
$\mathbf{H}^e$	Interpolationsfunktionen im Element
$\mathbf{K}^e$	Elementsteifigkeitsmatrix
$\mathbf{R}^e$	Elementrückstellkräfte
$u(\cdot)$	Verschiebungsfeld
$\mathbf{U}^e$	Vektor der Knotenverschiebungen am Element
$V^e$	Elementvolumen
$\delta W$	virtuelle Arbeit
<b>Z</b>	Integralausdruck zur Bestimmung der Ansatzfunktionen
$\kappa$	Lagrange Multiplikatoren
$\sigma$	Spannungstensor nach PIOLA-KIRCHHOFF
$\varepsilon$	Dehnungstensor nach GREEN

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Problemstellung

Für die Bemessung von dünnen und schlanken Strukturen, wie im konstruktiven Ingenieurbau häufig verwendet, kommt möglichem Tragwerksversagen durch Stabilitätsverlust entscheidende Bedeutung zu. Bekanntermaßen können insbesondere geometrische Imperfektionen so großen Einfluß auf die kritische Beullast haben, daß eine Bemessung nach der klassischen Stabilitätstheorie nicht möglich ist. Derartige Imperfektionen entstehen durch Unwägbarkeiten in der Herstellung und im Zusammenbau von Bauteilen. Sie sind mit deterministischen Kenngrößen nicht unmittelbar beschreibbar. Besonders deutlich ist dieses Verhalten bei Kreiszylinderschalen. Abb. 1.1 zeigt eine Zusammenstellung von Versuchsergebnissen für axial beanspruchte Kreiszyylinder bei variablem Verhältnis von Wanddicke zu Radius. Die kritischen Lasten streuen über den gesamten Bereich der Abzisse. Bereits in [32] werden hauptsächlich geometrische Imperfektionen als Ursache für den starken Abfall der gemessenen Beullast von der theoretisch bestimmten erkannt. Abb. 1.1 verdeutlicht, daß Beullasten nach der klassischen Stabilitätstheorie für die Bemessung von imperfektionsempfindlichen Strukturen nicht herangezogen werden können. In der Normung ist deshalb ein unterer Fraktilwert experimentell ermittelter Beullasten festgelegt, nach dem imperfektionsempfindliche Strukturen bemessen werden sollen. Numerische Analysen stabilitätsgefährdeter Strukturen bauen in zunehmendem Maße auf der FE-Methode auf. In diesem Zusammenhang existieren unterschiedliche Methoden zur Bemessung imperfektionsgefährdeter Strukturen, die sich alle weitgehend an einer *unteren Grenze* orientieren:

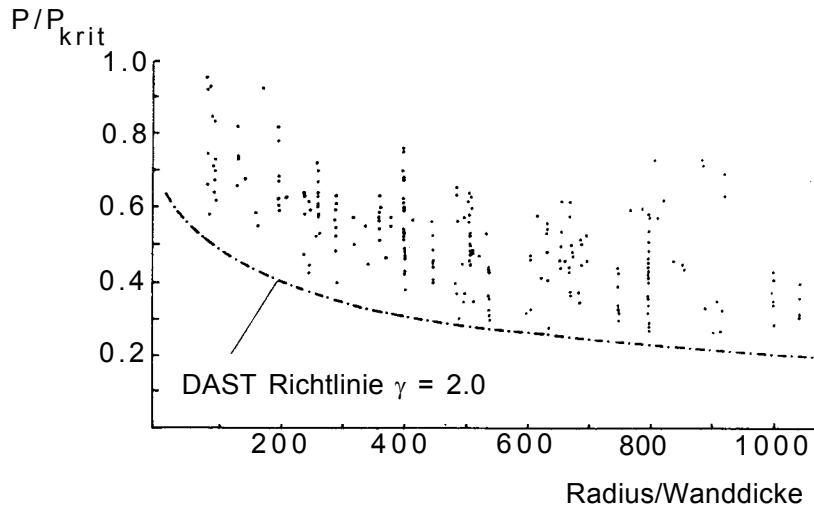


Abbildung 1.1: Streuung von Versuchsergebnissen an Kreiszyinderschalen [75]

Eine lineare Stabilitätstheorie nach dem Konzept der *quasi-verzerrungsfreien* Verbiegung basiert auf dem Grundgedanken, daß während des Beulvorganges ein Großteil der Membrantragfähigkeit der Struktur verlorengeht. Die Vernachlässigung des Membrananteils bei linearen Stabilitätsberechnungen führt WITTEK [77] zufolge auf eine untere Abschätzung der Traglast. Der Bereich zwischen unterer und oberer Stabilitätsgrenze wird durch richtungsabhängige Beiwerte, den sog. Membranreduktionsfaktoren  $r$  beschrieben. Für gegebene Imperfektionsformen und Amplituden läßt sich das Konzept der reduzierten Membranenergie mit den Imperfektionsgesetzen von KOITER, z.B. [25, 26, 72] verknüpfen. Für imperfekte Schalen werden Reduktionsfaktoren zwischen  $0 \leq r \leq 1$  mit entsprechenden Durchschlagslasten an der perfekten Struktur bestimmt. Eine Bemessung erfolgt in Abhängigkeit von der ermittelten asymptotischen Imperfektionsempfindlichkeit der Struktur. Eine Auswahl der zu analysierenden Imperfektionsformen kann mit dem Verfahren nicht durchgeführt werden.

Ein in den Zielen ähnliches Bemessungskonzept wird in [75] vorgeschlagen. Grundlage ist hierbei die Berechnung einer Störenergie, die dem Tragwerk zugeführt werden muß, um von einem stabilen Grundzustand in den nächstgelegenen Nachbarzustand auf gleichem Lastniveau zu gelangen. Als Bezugsenergie dient die im ersten Verzweigungspunkt eingeprägte Energie. Das Verhältnis der ermittelten Störenergie zur eingepprägten kritischen Energie stellt ein Maß für die Imperfektionssensitivität des Tragwerks dar. Eine Kalibrierung dieses Maßes führt auf eine

Bemessung, die im wesentlichen den heutigen Richtlinien entspricht. Der Nachbeulpfad des perfekten Systems wird von einem verschiebungsabhängigen Vorbeulzustand über ein Eigenwertproblem erreicht. Der resultierende Eigenvektor stellt dann die ungünstigste Imperfektionsform dar [75].

Die Verfolgung sämtlicher Sekundär- sowie möglicher Tertiärpfade einer Struktur führt auf Nachbeulminima, die in etwa der deutschen und europäischen Norm entsprechen [28]. Ein direkter Zugang des Problems gelingt, wenn die Geometrieabweichungen als Knotenfreiheitsgrade interpretiert werden. Die ungünstigste Imperfektionsform für eine Imperfektionsamplitude läßt sich dann über Energieminimierung bestimmen.

Die genannten Verfahren schlagen eine Bemessung nach der ungünstigsten Konstellation vor, über deren Eintrittswahrscheinlichkeit jedoch keine Aussage getroffen wird. Eine solche Vorgehensweise ist insbesondere für Strukturen, bei denen das Gewicht von entscheidender Bedeutung ist, nicht rentabel z.B. [4]. Vielmehr wird ein probabilistisches Maß zur Entscheidungsfindung gefordert, das mit Hilfe der Zuverlässigkeitstheorie [49, 69] bestimmt werden kann. Die Bemessung orientiert sich dann an einer Versagenswahrscheinlichkeit der Struktur, die nicht überschritten werden darf. Hiefür müssen die Unsicherheiten durch probabilistische Modelle beschrieben werden können. In dieser Arbeit werden geometrische Imperfektionen durch probabilistische Modelle berücksichtigt und hinsichtlich des Einflusses auf das statische Stabilitätsverhalten einer Struktur untersucht. Insbesondere wird auf die Frage nach der Imperfektionsform, die den höchsten Beitrag zur Versagenswahrscheinlichkeit liefert, eingegangen.

## 1.2 Berechnungsverfahren

Die geometrischen Imperfektionen der betrachteten Strukturen werden als räumlich verteilte Fluktuationen um eine Soll-Geometrie interpretiert. Dies bezieht sich bei Balken auf die Achse und bei Schalen auf die Mittelfläche. Fluktuationen von Querschnittsabmessungen (z.B. Schalendicke) werden in dieser Arbeit nicht untersucht. Die Fluktuationen sind stochastischer Natur und werden daher mit einem probabilistischen Modell beschrieben. In diesem Zusammenhang erscheinen skalare Zufallsfelder, die durch Verteilungstyp, Mittelwerts- und Korrelationsfunktion beschrieben werden und einen definierten Homogenitäts- und Isotropiegrad haben, als geeignet. In Kombination mit der Finite Elemente Methode bietet sich eine ortsdiskretisierte Darstellung der Zufallsfelder an. Durch *bedingte* Zu-

fallsfelder [31] kann zusätzliche Information über deterministische Werte an einem bzw. mehreren Orten des diskretisierten Feldes berücksichtigt werden. Somit können Randbedingungen des Zufallsfeldes, wie sie beispielsweise an Auflagern der Struktur auftreten, im probabilistischen Modell berücksichtigt werden. Mit ortsdiskretisierten Zufallsfeldern wird die Kovarianzstruktur des Feldes auf vergleichsweise einfache Art als Matrix formuliert. Die direkte Monte Carlo Simulation zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ist grundsätzlich möglich, jedoch numerisch sehr aufwendig. Der Grundgedanke des verwendeten Verfahrens besteht darin, das stochastische Problem für einen Wahrscheinlichkeitsbereich, der für die Bemessung entscheidend ist, in einem *geeigneten* Unterraum darzustellen. Ausgangspunkt des Rechenmodells ist eine Entkopplung der Zufallsvariablen durch eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix. Die Eigenvektoren entsprechen Imperfektionsformen, die Eigenwerte Varianzen der Amplituden [16]. Somit werden Imperfektionsformen denen ein probabilistisches Gewicht zugeordnet ist, auf systematische Weise formuliert. Das Imperfektionsfeld wird dann als Superposition von deterministischen Imperfektionsformen mit normalverteilten Amplituden verstanden. Die Imperfektionsformen können mit strukturellemechanischen Verfahren untersucht und in Bezug auf ihren Einfluß auf das Strukturverhalten geordnet werden. Sofern ein geeigneter Unterraum des stochastischen Problems *a priori* bekannt ist, bietet sich eine Projektion des Zufallsfeldes in diesen Raum an. Damit wird die Problemstellung von vornherein auf wenige Zufallsvariablen beschränkt. Die Zerlegung der Kovarianzmatrix und die Bestimmung der Imperfektionsformen für die unabhängigen Zufallsvariablen findet dann im projizierten Raum statt.

Die Versagenswahrscheinlichkeit ist als Integral der Verbunddichte der diskreten Zufallsvariablen über dem Versagensbereich definiert [69]. Sofern der Versagensbereich für die wichtigsten Zufallsvariablen bekannt ist, kann die Versagenswahrscheinlichkeit ohne numerisch aufwendige Strukturanalysen mit Monte Carlo Verfahren erfolgen [14, 21, 49, 69]. Die Beschreibung des Grenzzustandes gelingt mit einem Interaktionsmodell für die wichtigsten Zufallsvariablen, das im wesentlichen zwischen berechneten Grenzzustandspunkten interpoliert [53, 54]. Mit dem Bemessungspunkt der Grenzzustandsfunktion (*beta*-Punkt) kann auf die Imperfektionsform mit dem größten probabilistischen Gewicht geschlossen werden.

Um die Versagenswahrscheinlichkeit nach dem skizzierten Verfahren zu bestimmen, muß das stochastische Problem auf wenige entscheidende Zufallsvariablen reduziert werden. Durch Reihenentwicklungen der Gleichgewichts- und Singularitätsbedingung lassen sich für Durchschlagspunkte, Ein- und Mehrfachverzwei-

gungen funktionale Zusammenhänge zwischen kritischer Last des imperfekten Systems und Imperfektionsamplitude ableiten [25, 26, 72]. Es wird diskutiert, inwieweit diese Gesetze eine numerisch effektive Bewertung der Imperfektionsformen erlauben. Unter Umständen muß bereits für die Sensitivitätsanalyse eine nichtlineare Berechnung mit dementsprechend hohem numerischen Aufwand durchgeführt werden. Für die wichtigsten Zufallsvariablen erfolgen die Grenzzustandsberechnungen am imperfekten System durch nichtlineare Berechnungen, die auf Indifferenzenverfahren und Pfadverfolgungstechniken aufbauen. Bei konstanter Last werden die Imperfektionsamplituden bis zur Stabilitätsgrenze gesteigert.

Die Umsetzung des beschriebenen Verfahrens bedarf einer leistungsfähigen Software. Mit kommerziell verfügbaren Produkten können viele Problemkreise aus der Strukturmechanik gelöst werden, jedoch sind die Möglichkeiten dieser Programme insbesondere für stochastische Probleme sehr begrenzt. Das Software Paket *SIANG* [19, 20] verbindet die Finite Element Methode mit probabilistischen Methoden zur Modellierung von stochastischen Belastungen sowie physikalischen und geometrischen Unsicherheiten. Die Finite Element Formulierung berücksichtigt geometrische und physikalische Nichtlinearitäten. Das Programm ist modular in einer *Meta*-Sprache konzipiert und somit nicht an vordefinierte Kommandosequenzen gebunden. Die Struktur des Programms ermöglicht es, auf einfache Weise neue Problemlösungen zu integrieren.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Nach einer Einführung in Kap. 1 wird in Kap. 2 das probabilistische Modell vorgestellt. Zunächst werden Grundlagen der Zufallsfelder diskutiert [73]. Für die Modellierung von geometrischen Imperfektionen sollen Randbedingungen des Zufallsfeldes, wie etwa an Auflagern der Struktur, im probabilistischen Modell berücksichtigt werden. Solche *bedingten* Zufallsfelder werden im folgenden Abschnitt vorgestellt [31]. Danach wird auf die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit nach Methoden der Zuverlässigkeitstheorie eingegangen [49, 69]. Neben dem FORM Verfahren (*First Order Reliability Method*), werden direkte Monte Carlo Simulation und varianzmindernde Verfahren, die auf *Importance Sampling* Strategien aufbauen [14, 21], erwähnt. In Kap. 3 wird das statische Stabilitätsverhalten von Strukturen diskutiert [58, 76]. Nach einer Einführung zu Stabilitätskriterien, wird die Anfangsnachbeulanalyse sowie die auf KOITER zurückgehenden Imperfektionsgesetze (vgl. [25, 26, 72]) an Hand der Gleichgewichts-

und der Singularitätsbedingung am kritischen Punkt abgeleitet [59]. Die verwendeten Verfahren zur Bestimmung der kritischen Beullast für das perfekte System [15, 58, 76] werden im Anschluß formuliert.

Die Beispielrechnungen wurden mit Hilfe des Programmsystems SIang [19, 20] durchgeführt. In Kap. 4 wird auf die Struktur des Programms sowie insbesondere auf die verwendete Finite Element Formulierung eingegangen. Kap. 5 zeigt Anwendungen. Die Zusammenfassung mit den abgeleiteten Schlußfolgerungen ist im letzten Kapitel enthalten.

# Kapitel 2

## Probabilistisches Modell

### 2.1 Einführung

Zufallsfelder sind in Zusammenhang mit der *probabilistischen* Finite Elemente Methode [17, 29, 30, 38, 46, 47, 48, 66, 67] eingesetzt worden, um den Einfluß von streuenden Struktureigenschaften, wie etwa dem Elastizitätsmodul, auf die Systemantwort zu untersuchen [29, 66, 67], sowie eine Aussage bezüglich der Zuverlässigkeit der Struktur zu treffen [17, 38, 46, 47, 48].

Beide Problemstellungen können in den seltensten Fällen analytisch beschrieben werden. Zur Lösung kommen daher vor allem semianalytische Methoden und verschiedene Formen der Monte Carlo Simulation zur Anwendung, s. [16, 17] für eine diesbezügliche Übersicht. Meist basieren solche Methoden auf Reihenentwicklungen, wobei versucht wird, wiederholte rechenzeitaufwendige Operationen, wie z.B. die Invertierung von Matrizen oder das Lösen von Eigenwertproblemen zu vermeiden. Die direkte Monte Carlo Simulation zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit ist zwar grundsätzlich möglich, erweist sich jedoch selbst bei Verwendung der erwähnten semianalytischen Methoden als numerisch sehr aufwendig. Ein Ausweg besteht in der Beschreibung des Übergangs vom stabilen zum instabilen Strukturverhalten durch einfache Funktionen. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit erfolgt wiederum durch Monte Carlo Simulation, jedoch sind dann für eine Realisation keine rechenzeitintensiven Strukturanalysen mehr notwendig [14, 21]. Das Verfahren wird daher gerade bei kleinen Wahrscheinlichkeiten attraktiv. Diese Methode, die auch als *Response Surface Method* [53, 54] bezeichnet wird, ist jedoch nur für eine begrenzte Anzahl von Zufallsva-



riablen ( $n < 25$ ) anwendbar.

Die skizzierte Vorgehensweise wird angewendet, um Versagenswahrscheinlichkeiten für geometrisch imperfekte Strukturen unter statischen Stabilitätskriterien zu berechnen. Die geometrischen Imperfektionen werden dabei als Zufallsfelder modelliert. Da die verwendeten Zufallsfelder skalarer Natur sind, muß neben der Modellierung des Zufallsfeldes noch eine Orientierung der Imperfektion definiert werden. Hierbei erscheint die Normalenrichtung einer definierten Referenzfläche als geeignet.

In einer spektralen Darstellung kann ein Zufallsfeld durch Superposition orthogonaler Formen mit zufälligen Amplituden dargestellt werden [35]. Für ein ortsdiskretisiertes Zufallsfeld gelingt eine spektrale Darstellung durch die Diagonalisierung der Kovarianzmatrix. Dies entspricht einer über ein Eigenwertproblem definierten Transformation in einen Raum, in dem die Zufallsvariablen unkorreliert sind. Entscheidend ist hierbei, daß die Eigenvektoren deterministisch sind. Die Eigenvektoren stellen Imperfektionsformen, die Eigenwerte die Varianzen der Amplituden dar. Damit werden auf *systematischem* Weg Imperfektionsformen formuliert, denen ein probabilistisches Gewicht zugeordnet ist. Für diese Formen kann dann eine strukturmechanische Analyse durchgeführt werden.

Insbesondere Lagerungsbedingungen haben bei Stabilitätsbetrachtungen einen entscheidenden Einfluß [56]. Bei der Montage einer Struktur wird deshalb versucht, Imperfektionen durch eine erhöhte Präzision zu vermeiden. Im Idealfall liegen an solchen Orten keine Imperfektionen vor, an der übrigen Struktur sind sie weiterhin vorhanden. Um solche Effekte im probabilistischen Modell zu berücksichtigen, werden *bedingte* Zufallsfelder angewendet [31]. Dies beinhaltet im wesentlichen eine nachträgliche Modifikation der Kovarianzstruktur des Feldes durch ein stochastisches Interpolationsverfahren. Messwerte können auf solche Weise ebenfalls berücksichtigt werden.

Das Kap. 2 ist folgendermaßen gegliedert: Zunächst soll auf Eigenschaften von Zufallsfeldern, dann auf Modellierungsmöglichkeiten eingegangen werden. Die bereits erwähnten bedingten Zufallsfelder werden vorgestellt. Mit einer modifizierten Kovarianzmatrix kann die Transformation in die spektrale Darstellung erfolgen. Im Rahmen der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird auf die Approximation des Grenzzustandes eingegangen. Nachfolgend werden Näherungsverfahren und Simulationsverfahren angesprochen.

## 2.2 Zufallsfelder

### 2.2.1 Eigenschaften von Zufallsfeldern

Geometrische Imperfektionen können als räumlich streuende Struktureigenschaften, die sich stochastisch beschreiben lassen, interpretiert werden. Die räumlich streuenden Fluktuationen werden als Zufallsfelder bezeichnet, die im folgenden mit  $H(\mathbf{x})$  notiert werden. Sie besitzen Eigenschaften, die durch einen Verteilungstyp, eine Mittelwerts- und eine Korrelationsfunktion beschrieben werden können und einen definierten Homogenitäts- und Isotropiegrad haben [73]. Zur Beschreibung der geometrischen Imperfektionen soll von GAUSS-verteilten Zufallsfeldern ausgegangen werden, da positive und negative Vorzeichen der Imperfektionen als gleichberechtigt erscheinen. Diese Annahme stellt bezüglich des vorgestellten Rechenmodells jedoch keine grundlegende Einschränkung dar.

- Mittelwertsfunktion

$$\overline{H}(\mathbf{x}) = E[H(\mathbf{x})] \quad (2.1)$$

$\mathbf{x}$  stellt einen Ortsvektor dar,  $E$  den Erwartungswertoperator [18].

- Korrelationsfunktion

$$R_{HH}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = E[H(\mathbf{x}_1)H(\mathbf{x}_2)] \quad (2.2)$$

Die Korrelationsfunktion ist dabei symmetrisch, d.h.

$$R_{HH}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = R_{HH}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (2.3)$$

Ferner ist die Korrelationsfunktion stets nichtnegativ definit:

$$\iint_D R_{HH}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) w(\mathbf{x}_1)w(\mathbf{x}_2) d\mathbf{x}_1 d\mathbf{x}_2 \geq 0, \quad (2.4)$$

für jede beliebige Funktion  $w(\mathbf{x})$  auf dem vorgegebenen Integrationsgebiet.

- Homogenität

Ein Zufallsfeld wird als schwach homogen bezeichnet, wenn die Momente erster und zweiter Ordnung (d.h. Mittelwert und Kovarianzfunktion) unabhängig vom Ort sind. Eine parallele Verschiebung  $\xi$  hat dann keinen Einfluß auf Gl. 2.1 und Gl. 2.2.

$$\overline{H}(\mathbf{x}) = \overline{H}(\mathbf{x} + \xi) \quad (2.5)$$

$$R_{HH}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = R_{HH}(\mathbf{x}_1 + \xi, \mathbf{x}_2 + \xi) \quad (2.6)$$

Sind alle Momente ortsunabhängig, heißt das Zufallsfeld streng homogen.

- Isotropie

Die Isotropie eines Zufallsfeldes verlangt, daß die Korrelationsstruktur nur vom Betrag des Abstandes abhängt und somit keine Richtungsabhängigkeit aufweist.

$$R_{HH}(\mathbf{x}, \mathbf{x} + \xi) = R_{HH}(\|\xi\|) \quad (2.7)$$

## 2.2.2 Modellierung von Zufallsfeldern

Zur Beschreibung der stochastischen geometrischen Imperfektionen soll von *homogenen* Zufallsfeldern ausgegangen werden. Diese Annahme stellt bezüglich der statistischen Beschreibung der Zufallsfelder eine Vereinfachung dar. Das vorgestellte Rechenmodell ist jedoch ohne größere Schwierigkeiten auch auf inhomogene Zufallsfelder anwendbar. Zur Modellierung eines homogenen Zufallsfeldes werden Verteilungstyp, Mittelwert und Korrelationsfunktion festgelegt. Die Korrelationsfunktion enthält neben der Information zur Isotropie Aussagen über das ortsabhängige Abklingverhalten zweier Zufallsvariablen. Das Abklingverhalten wird über einen Funktionstyp und eine Korrelationslänge  $l_H$  beschrieben. Für große Korrelationslängen,  $l_H \rightarrow \infty$ , liegt eine nahezu lineare Abhängigkeit der zufälligen Schwankungen zwischen allen Zufallsvariablen vor, während für kurze Korrelationslängen das Zufallsfeld zunehmend unkorreliert wird. Für  $l_H \rightarrow 0$  sind die Fluktuationen an allen Punkten des Zufallsfeldes voneinander unabhängig. Häufig wird für eine stochastische Beschreibung der räumlich fluktuierenden Größen eine Korrelationsfunktion mit exponentiell abfallendem Verlauf angewendet. In einem solchen Fall gilt für ein isotropes Zufallsfeldes [35, 73]:

$$R_{HH} = \sigma_{HH}^2 e^{\frac{-\xi}{l_H}}, \quad (2.8)$$

mit

$$\xi = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \quad (2.9)$$

Die Korrelationslänge  $l_H$  kann als Schwerpunkt des Betrags des Funktionsverlaufs von  $R_{HH}$  interpretiert werden. Abb. 2.1 zeigt die Korrelationfunktion für den exponentiell abfallenden Fall (Gl. 2.8). Für die Modellierung eines Zufallsfeldes kommt der Bestimmung der Korrelationslänge meist eine stärkere Bedeutung zu, als der Wahl der Korrelationsfunktion [73].

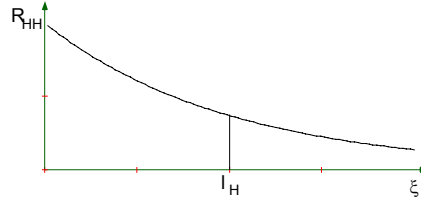


Abbildung 2.1: Korrelationsfunktion mit exponentiell abfallendem Verlauf

In einem Diskretisierungsprozess wird das kontinuierliche Zufallsfeld durch eine endliche Anzahl diskreter Zufallsvariablen dargestellt. Prinzipiell sind unterschiedliche Diskretisierungsprozesse möglich [16, 17], die sich im wesentlichen in zwei Klassen einteilen lassen. Die erste Klasse beinhaltet Verfahren, bei denen das Gebiet des Zufallsfeldes, ähnlich wie in der Finite Elemente Methode, mit Hilfe eines Netzes diskretisiert wird. In jedem Knoten bzw. Element dieses Netzes wird der Wert des Zufallsfeldes durch eine Zufallsvariable beschrieben. Weiterhin wird zwischen Punktdiskretisierungs- sowie verschmierten Modellen unterschieden. Bei der Methode der örtlichen Durchschnittsbildung werden die Eigenschaften der diskreten Zufallsvariable durch einen Durchschnittswert des Zufallsfeldes innerhalb eines Gebietes repräsentiert [33, 73, 74, 66]. Die Diskretisierung des Zufallsfeldes erfolgt bei der sog. Interpolationsmethode [47, 48] an diskreten Punkten innerhalb des Gebietes, der Funktionswert im Gebiet selbst wird über Ansatzfunktionen interpoliert. Bei Punktdiskretisierungsmethoden wird das Feld direkt mit Zufallsvariablen an diskreten Punkten dargestellt. Die Verbunddichte der Zufallsvariablen wird über das sog. NATAF-Modell [45, 51] dargestellt, d.h. über Randverteilung und eine Korrelationsstruktur beschrieben. Der Verteilungstyp sowie die statistischen Momente der Zufallsvariablen (Mittelwert, Varianz) entsprechen denen des Zufallsfeldes. Die Korrelationsstruktur der diskreten Zufallsvariablen läßt sich mit Hilfe einer Kovarianzmatrix  $\mathbf{C}_{xx}$  als eine Funktion des Ortes bestimmen:

$$C_{xx}(i, j) = R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) - \overline{H}(\mathbf{x}_i)\overline{H}(\mathbf{x}_j) \quad i, j = 1, n \quad (2.10)$$

Damit ist diese Methode insbesondere für eine rechentechnische Anwendung effizient anzuwenden. Zur Beschreibung der Fluktuationen von Materialeigenschaften (z.B. eines streuenden Elastizitätsmoduls) oder physikalischer Eigenschaften (z.B. der Dicke einer zweidimensional modellierten Struktur) wird häufig eine Diskretisierung im Schwerpunkt eines Elements [29, 67] sowie in den GAUSS-Punkten für die numerische Integration eines Elements [17] angewendet. Für eine

Ortsdiskretisierung des Zufallsfeldes kommt der Netzgenerierung eine wichtige Bedeutung zu. Die Netzdichte wird hauptsächlich von der Korrelationslänge beeinflusst. Nach [30, 38] sollte der Abstand zweier benachbarter Diskretisierungspunkte  $\frac{1}{4}$  der Korrelationslänge nicht überschreiten, um die Variabilität des Zufallsfeldes ausreichend darstellen zu können. Prinzipiell ist das Netz zur Darstellung des Zufallsfeldes unabhängig vom FE-Netz, jedoch sollte für einen effizienten Einsatz der Methode die Diskretisierung des Zufallsfeldes auf dem FE-Netz aufbauen. Zur Modellierung von geometrischen Imperfektionen bietet sich eine Diskretisierung des Zufallsfeldes an den Knotenpunkten des FE-Netzes an.

In der zweiten Klasse lassen sich Modelle zusammenfassen, bei denen das Zufallsfeld durch eine Reihenentwicklung mit deterministischen Funktionen, deren Koeffizienten zufällig sind, dargestellt wird. Anwendungen im Zusammenhang mit Finite Elemente Modellen finden sich in [35, 44, 80]. Diese Verfahren basieren auf einer spektralen Darstellung des Zufallsfeldes.

### 2.2.3 Bedingte Zufallsfelder

Häufig liegt für Zufallsfelder mit gegebener Korrelationsstruktur zusätzliche Information über Werte an einem bzw. mehreren Orten des diskretisierten Feldes vor. Diese Information, die z.B. aus Messungen oder aus Zwangsbedingungen für das Feld resultieren können, sollen bei einem probabilistischen Modell berücksichtigt werden. Dies erfordert die Modifikation der Parameter des Zufallsfeldes. Die Anpassung der Parameter kann mit Hilfe eines stochastischen Interpolationsverfahrens durchgeführt werden, das auf dem *maximum likelihood* Prinzip beruht [31, 43, 73]. Damit wird ein bedingtes Zufallsfeld definiert, das an den Stützstellen die vorgegebenen Werte sowie eine verschwindende Varianz besitzt. Zwischen den vorgegebenen Stützstellen ist das Feld weiterhin zufällig, wobei Mittelwert und Varianz des Feldes Funktionen des Ortes sind. Ein ursprünglich (schwach) homogenes Zufallsfeld verliert somit seine Homogenität (vgl. Gl. 2.5, Gl. 2.6).

Für GAUSS-verteilte Zufallsfelder lassen sich Ausdrücke für den bedingten Mittelwert und die bedingte Kovarianzmatrix analytisch ableiten [31]. Wie bereits erwähnt, läßt sich eine Beschreibung des modifizierten Zufallsfeldes mit Hilfe einer stochastischen Interpolation gewinnen. Das bedingte Zufallsfeld  $\hat{H}$  läßt sich über folgende Gleichung beschreiben:

$$\hat{H}(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^n b_l(\mathbf{x}) H(\mathbf{x}_l) \quad (2.11)$$

An den Orten  $\mathbf{x}_l, l = 1, n$  ist der Wert des Zufallsfeldes vorgegeben. Die vom Ort abhängigen Koeffizienten  $a(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  bestimmen sich dann aus der Bedingung, daß die Varianz von  $H(\mathbf{x}) - \hat{H}(\mathbf{x})$  minimiert wird, während der Erwartungswert  $E[H(\mathbf{x}) - \hat{H}(\mathbf{x})]$  zu Null wird. Als Lösung dieses Regressionsproblems erhält man für mittelwertfreie homogene Zufallsfelder am Ort  $\mathbf{x}_i$  den Mittelwert und die Kovarianz des bedingten Zufallsfeldes [31]:

$$\hat{\mu}(i) = [R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1), R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2), \dots, R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n)] \mathbf{C}_{xx}^{-1} \begin{bmatrix} H(\mathbf{x}_1) \\ H(\mathbf{x}_2) \\ \dots \\ H(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

$$\hat{\mathbf{C}}_{xx}(i, j) = [R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_1), R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_2), \dots, R_{HH}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_n)] \mathbf{C}_{xx}^{-1} \begin{bmatrix} R_{HH}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_1) \\ R_{HH}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_2) \\ \dots \\ R_{HH}(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

## 2.2.4 Transformation in den unkorrelierten Raum

Um Realisationen eines Zufallsfeldes durch Monte Carlo Verfahren zu erzeugen, müssen die korrelierten, möglicherweise nicht-normalverteilten Zufallsvariablen voneinander entkoppelt werden. Dies kann durch eine CHOLESKY-Zerlegung oder eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix erfolgen. Die Eigenwertzerlegung hat den Vorteil, daß - hinreichend große Korrelationslängen vorausgesetzt - eine Reduzierung der Dimension des Zufallsvariablenraums möglich wird. Dies ist für die weiteren Ausführungen von Bedeutung.

Liegt ein nichtnormalverteiltes Zufallsfeld vor, erfolgt zunächst eine Transformation in den korrelierten Normalraum. Bei einer solchen Transformation [45, 51] werden nicht-standardnormalverteilte Randverteilungen auf die Standardnormalverteilung abgebildet:

$$X_i = \Phi^{-1}(F_{Z_i}(z_i)) \quad (2.14)$$

$\Phi^{-1}$  beschreibt die Inverse der kumulativen Standardnormalverteilung,  $F_{Z_i}$  die Summenverteilung für die Größe  $Z_i$ . Durch die Abbildung ändert sich die Korrelationsstruktur der Zufallsvariablen. Die Korrelationskoeffizienten im GAUSS-Raum sind mit den Korrelationskoeffizienten im Originalraum über eine iterativ

zu lösende Beziehung miteinander verknüpft. Für hohe Korrelationen zwischen den Zufallsvariablen können sich hierbei jedoch Korrelationsmatrizen ergeben, die nicht positiv definit sind [45]. Für eine ausführliche Behandlung dieser Problemstellung wird auf [17, 45] verwiesen. Für GAUSS-verteilte Zufallsfelder wird die erwähnte Transformation nicht benötigt.

Die Transformationsvorschrift zwischen Originalraum und unkorreliertem Normalraum lautet dann:

$$\mathbf{Y} = \Psi \mathbf{X} \quad (2.15)$$

bzw.

$$\mathbf{X} = \Psi^T \mathbf{Y} \quad (2.16)$$

mit einer Transformationsmatrix, die die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\Psi^T \hat{\mathbf{C}}_{xx} \Psi = \text{diag}(\sigma_{Y_i}^2) \text{ mit } \sigma_{Y_1}^2 \geq \sigma_{Y_2}^2 \geq \dots \sigma_{Y_n}^2 \quad (2.17)$$

$\Psi$  sowie  $\sigma_{Y_i}^2$  stellen die Lösung des Standardeigenwertproblems für die Kovarianzmatrix dar. Die Eigenwerte und Eigenvektoren der Kovarianzmatrix sind von Geometrie, Korrelationslänge und Typ der Korrelationsfunktion abhängig. Die Eigenvektoren sind dabei keine zufälligen Größen. Die Eigenwerte  $\sigma_{Y_i}^2$  entsprechen den Varianzen der Zufallszahlen  $X_i$  im unkorrelierten Raum. Durch Gl. 2.16 wird das Zufallsfeld als eine Superposition von deterministischen Eigenformen mit zufälligen Amplituden dargestellt.

Wird ein Zufallsfeld im unkorrelierten Raum durch die ersten  $k$  Komponenten abgebildet, kann durch die Invarianzeigenschaft der ersten Invarianten einer Matrix bezüglich Koordinatentransformationen ein Qualitätsmaß für die Repräsentation des Zufallsfeldes gewonnen werden [16, 17].

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^k \sigma_{Y_i}^2}{\text{tr}(\mathbf{C}_{xx})} \quad (2.18)$$

Oft genügen bereits wenige Zufallsvariablen, um ein Zufallsfeld z.B. mit einer Qualität von  $Q > 0.9$  darzustellen. Für ein Zufallsfeld über einer quadratischen Platte mit der Kantenlänge  $L = 4m$  ist der Zusammenhang zwischen Qualität, Korrelationslänge und Anzahl der Zufallsvariablen in Abb. 2.2 dargestellt. Für große

Korrelationslängen werden wenige Zufallsvariablen benötigt, um eine vorgegebene Qualität  $Q$  des Zufallsfeldes zu erreichen, für kurze Korrelationslängen bedarf es einer größeren Anzahl von Zufallsvariablen zur Repräsentation der gleichen Qualität.

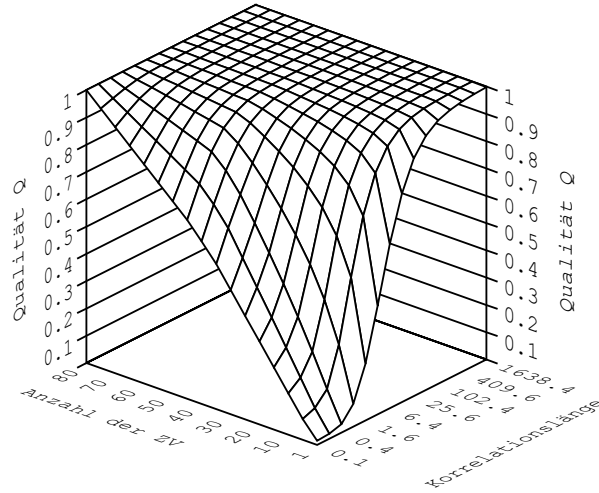


Abbildung 2.2: Qualität eines Zufallsfeldes [16]

Zur Lösung von Gl. 2.15 können Eigenwertlöser angewendet werden, die nur die  $k$  größten Eigenwerte bestimmen. Eine Realisation für das Zufallsfeld gelingt dann mit Hilfe von Gl. 2.16. Die numerisch aufwendige Eigenlösung der Kovarianzmatrix muß dabei lediglich einmal bestimmt werden.

Realisationen der unkorrelierten normalverteilten Zufallsvariablen können z.B. durch Generierung von gleichförmig verteilten Zufallszahlen und einer anschließenden Transformation auf die GAUSS-Verteilung mit Gl. 2.14 erfolgen. Sofern nicht-normalverteilte Zufallsfelder vorliegen, erfolgt eine Rücktransformation der somit erhaltenen Größen auf die Originaldichteverteilung mit Hilfe der zu Gl. 2.14 inversen Beziehung [17].

Abb. 2.3 stellt exemplarisch eine Realisation eines Zufallsfeldes über einer quadratischen Platte mit der Kantenlänge  $a$  dar. Abb. 2.4 zeigt einen Eigenvektor des Zufallsfeldes. Abb. 2.5 stellt eine Realisation eines bedingten Zufallsfeldes dar. Zusätzlich zum in Abb. 2.3 dargestellten Zufallsfeld wird gefordert, daß an den Rändern der Platte bei  $y = 0$  sowie  $y = a$  das Zufallsfeld jeweils den Wert Null annimmt. Abb. 2.6 zeigt einen Eigenvektor des bedingten Zufallsfeldes.



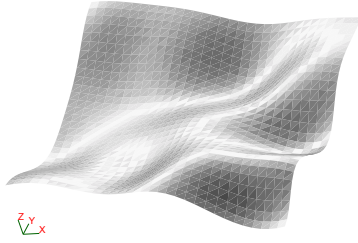


Abbildung 2.3: Realisation des Zufallsfeldes

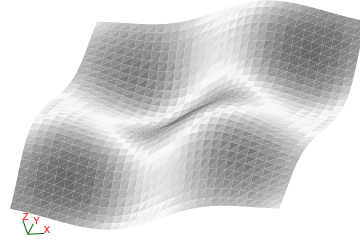


Abbildung 2.4: Eigenvektor des Zufallsfeldes

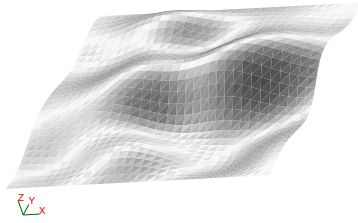


Abbildung 2.5: Realisation des bedingten Zufallsfeldes

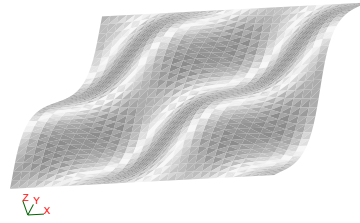


Abbildung 2.6: Eigenvektor des bedingten Zufallsfeldes

## 2.2.5 Projektion der Kovarianzmatrix in einen Unterraum

Sind entscheidende Imperfektionsformen *a priori* bekannt, kann die Berechnung mit folgender Variante des geschilderten Verfahrens durchgeführt werden: Ausgangspunkt sind die  $m$  linear unabhängigen Imperfektionsformen  $\Psi^*$ , die als bekannt gelten sollen. Diese Imperfektionsformen werden orthonormalisiert [18]. Damit kann eine Projektion des Zufallsfeldes auf den betrachteten Unterraum durchgeführt werden.

$$\Psi_{Or}^{*T} \mathbf{C}_{xx} \Psi_{Or}^* = \tilde{\mathbf{C}}_{xx} \quad (2.19)$$

Der Index  $Or$  kennzeichnet die bereits orthonormierten Imperfektionsformen.  $\tilde{\mathbf{C}}_{xx}$  stellt die Kovarianzmatrix des Zufallsfeldes im Unterraum dar. Diese kann wiederum spektral zerlegt werden:

$$\tilde{\Psi} \tilde{\mathbf{C}}_{xx} \tilde{\Psi} = \text{diag} \left( \sigma_{\tilde{Y}_i}^2 \right) \quad (2.20)$$

Das Zufallsfeld wird dann durch die Imperfektionsformen

$$\tilde{\Psi}^* = \Psi^* \tilde{\Psi} \quad (2.21)$$

und die Varianzen  $\sigma_{\tilde{Y}_i}^2$  mit  $i = 1, m$  dargestellt. Damit beschränkt man sich von vornherein auf wenige Imperfektionsformen. Der numerische Aufwand ist dementsprechend geringer. In Kap. 5.4 wird diskutiert, in welchen Fällen Unterräume des Problems von vornherein festgelegt werden können. Der Anteil der Imperfektionsformen im Zufallsfeld läßt sich durch das Verhältnis der Summen der Diagonalelemente der projizierten und der ursprünglichen Kovarianzmatrix bestimmen, vgl. Gl. 2.18.

## 2.3 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Die Versagenswahrscheinlichkeit einer Struktur wird als Integral der Verbunddichte des Zufallszahlenvektors  $\mathbf{Y}$  über den Versagensbereich ausgedrückt [49, 69].

$$p_f = \int_{g(\mathbf{y}) \leq 0} f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.22)$$

Die Ungleichung  $g(\mathbf{y}) < 0$  beschreibt den Wertebereich der Zufallsvariablen, für den Versagen eintritt. Die implizite Funktion  $g$ , die den sicheren Bereich vom Versagensbereich trennt, wird als Grenzzustandsfunktion bezeichnet. Funktionswerte mit  $g(\mathbf{y}) \leq 0$  kennzeichnen Versagenszustände,  $g(\mathbf{y}) > 0$  stellt den sicheren, bzw. gebrauchstauglichen Zustand der Struktur dar. Zur numerischen Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit wird eine Indikatorfunktion  $I$  eingeführt, die angibt, ob eine Realisation im Versagensbereich liegt.

$$I(g(\mathbf{y})) = \begin{cases} 1 & \text{falls } g(\mathbf{y}) \leq 0 \\ 0 & \text{falls } g(\mathbf{y}) > 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Dies erlaubt es, den Integrationsbereich in Gl. 2.22 zu ändern:

$$p_f = \int_D I(g(\mathbf{y})) f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.24)$$

$D$  stellt den Definitionsbereich von  $f_{\mathbf{Y}}$  dar. Ist die Grenzzustandsfunktion explizit bekannt, kann das Integral in Gl. 2.24 durch Monte Carlo Simulation bestimmt werden, ohne hierfür aufwendige Strukturanalysen durchführen zu müssen.

### 2.3.1 Approximation der Grenzzustandsfunktion

Für die meisten praktischen Anwendungen kann die Grenzzustandsfunktion nicht explizit angegeben werden. Für eine näherungsweise Beschreibung der Grenzzustandsfunktion kommen häufig Approximationsmodelle zur Anwendung [17, 53, 54].

Durch Strukturanalysen lassen sich stets diskrete Punkte der Grenzzustandsfunktion ermitteln. Hierfür werden in vorzugebenden Suchrichtungen Werte der Zufallsvariablen an der Grenze der Gebrauchstauglichkeit ermittelt. Als Suchrichtungen eignen sich z.B. die Koordinatenachsen im Raum der Zufallsvariablen bzw. die Winkelhalbierenden der paarweisen Kombinationen. Eine Approximation der Grenzzustandsfunktion gelingt dann durch Interpolation zwischen den ermittelten Stützstellen [17, 53, 54]. Damit stellt dieses Verfahren ein Interaktionsmodell für die Zufallsvariablen dar.

Für die vorliegende Anwendung wird nach Amplituden der Imperfektionsformen gesucht, bei denen am definierten Lastzustand gerade Stabilitätsversagen eintritt. Die explizite Berechnung der diskreten Grenzzustandspunkte kann für Strukturmodelle mit einer großen Anzahl von Freiheitsgraden und nichtlinearem Verhalten sehr zeitaufwendig sein. Dies vergegenwärtigt nochmals die Notwendigkeit, die Anzahl der Zufallsvariablen, für die derartige Berechnungen durchgeführt werden, bereits vorab mit einem geeigneten semi-analytischen Verfahren, s. Kap. 3.4, zu reduzieren.

Häufig gelangen als Interpolationsfunktion quadratische Polynome in  $\mathbf{R}^n$  zur Anwendung [53, 54] ( $n$  kennzeichnet die Anzahl der Zufallsvariablen). Diese Funktionen haben den Vorteil, daß sie einfach formuliert werden können und gleichzeitig Krümmungen im Raum der Zufallsvariablen abbilden. Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften in den Koeffizienten werden dann  $n + \frac{n(n+1)}{2}$  Stützstellen benötigt. Als Suchrichtungen dienen positive und negative Richtung sowie paarweise Kombinationen der Zufallsvariablen. Die Vorzeichen gemischter Terme sollten in Richtung der sensitiven Koordinatenachsen gelegt werden [53]. Eine vorab durchgeführte Sensitivitätsanalyse kann als Entscheidungskriterium dienen. Das geschilderte Verfahren ist heuristischer Natur. Prinzipiell sind auch andere Suchrichtungen für die Bestimmung der Grenzzustandspunkte sowie andere Funktionsklassen zur Interpolation denkbar.

### 2.3.2 Näherungsmethode 1. Ordnung (FORM)

Für Näherungsverfahren erster Ordnung (FORM - *first order reliability method*) zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit [49, 69] wird die Grenzzustandsfunktion im Standardnormalraum um den Punkt linearisiert, dessen Umgebung das größte Gewicht an der Versagenswahrscheinlichkeit zukommt.

Sofern die Zufallsvariablen unabhängig und normalverteilt sind, kann die Grenzzustandsfunktion direkt im Standardnormalraum formuliert werden. Wie in den vorangegangenen Abschnitten ausgeführt wurde, ist dies im vorliegenden Fall möglich. Insbesondere ergibt sich für ein quadratisches Interpolationspolynom dann folgender Ausdruck:

$$\tilde{g}(\mathbf{y}) = a_0 + \sum_{i=1}^n b_i \frac{y_i}{\sigma_{Y_i}} + \sum_{i,j=1}^n c_{ij} \frac{y_i}{\sigma_{Y_i}} \frac{y_j}{\sigma_{Y_j}} = 0 \quad (2.25)$$

Der kürzeste Abstand der Grenzzustandsfläche zum Ursprung wird als Sicherheitsindex (*beta*-Abstand) bezeichnet. Der Punkt  $\mathbf{y}^*$ , der dieses Kriterium erfüllt, ist der Bemessungspunkt [69]. Für diese Konstellation der Zufallsvariablen ergibt sich der höchste Beitrag zur Versagenswahrscheinlichkeit. Mit dem Vektor der Richtungsableitungen  $\mathbf{G}(\mathbf{y}^*) = \left( \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_1} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*}, \dots, \left. \frac{\partial \tilde{g}}{\partial y_n} \right|_{\mathbf{y}=\mathbf{y}^*} \right)^T$  läßt sich eine linearisierte Grenzzustandsfunktion in HESSEscher Normalform angeben:

$$\tilde{g}_{lin}(\mathbf{y}) = \alpha^T \mathbf{y} + \beta = 0 \quad (2.26)$$

Der Ausdruck  $\alpha = \frac{\mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\sqrt{\mathbf{G}^T(\mathbf{y}^*) \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}}$  stellt den Vektor des Richtungskosinus dar. Der kürzeste Abstand der Hyperebene zum Ursprung kann dann mit

$$\beta = -\frac{\mathbf{y}^{*T} \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}{\sqrt{\mathbf{G}^T(\mathbf{y}^*) \mathbf{G}(\mathbf{y}^*)}} \quad (2.27)$$

angegeben werden. Eine Näherung für die Versagenswahrscheinlichkeit kann mit  $p_f = \Phi(-\beta)$  formuliert werden [69],  $\Phi$  stellt die Summenverteilung für die Standardnormalverteilung dar. Der Wertebereich des Richtungskosinus liegt zwischen -1 und 1, wobei  $\alpha^T \alpha = 1$  gilt. Der Vektor  $\alpha$  stellt damit ein Maß für den Einfluß der Zufallsvariablen auf die Versagenswahrscheinlichkeit dar [69].

Die Suche nach dem Bemessungspunkt wird als Optimierungsproblem mit Nebenbedingung formuliert:

$$\text{Minimiere } \mathbf{y}^T \mathbf{y} \quad \text{unter } g(\mathbf{y}) = 0 \quad (2.28)$$

Zur Lösung können Standardoptimierungsverfahren [65] verwendet werden. Für lineare Grenzzustandsfunktionen und normalverteilte unabhängige Zufallsvariablen stellt  $p_f = \Phi(-\beta)$  die exakte Versagenswahrscheinlichkeit dar [69].

### 2.3.3 Monte Carlo Simulation

Die Versagenswahrscheinlichkeit stellt den Erwartungswert der Indikatorfunktion aus Gl. 2.24 dar.

$$p_f = E[I(g(\mathbf{y}))] \quad (2.29)$$

Ein erwartungstreuer Schätzwert für  $p_f$  ergibt sich dann für  $N$  Stichproben zu:

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I(y_i) \quad (2.30)$$

Neben dem Schätzwert selbst kann auch die Varianz des Schätzwerts ermittelt werden:

$$\sigma_{p_f}^2 = \frac{1}{N} (p_f - p_f^2) \quad (2.31)$$

Der Ausdruck  $\sigma_{p_f}$  ist der sog. Standardfehler. Dieser stellt ein statistisches Maß für die Genauigkeit der Versagenswahrscheinlichkeit dar. Damit kann eine Aussage über die Größenordnung der benötigten Anzahl an Simulationen getroffen werden. Für  $N \rightarrow \infty$  strebt die Schätzung der Versagenswahrscheinlichkeit gegen die exakte Lösung. Für kleine Versagenswahrscheinlichkeiten wird die Anzahl der benötigten Realisationen sehr groß. Varianzmindernde Simulationsverfahren führen dann auf effizientere Simulationsstrategien. Unter einer Vielzahl an Möglichkeiten [60] werden für Zuverlässigkeitsberechnungen vor allem Verfahren angewendet, die auf *Importance Sampling* Techniken beruhen.

### 2.3.4 Importance Sampling Strategien

Im wesentlichen wird beim *Importance Sampling* [14, 21, 22, 60] versucht, das Verhältnis der Anzahl der im Versagensbereich liegenden Realisationen gegenüber der Gesamtzahl der Realisationen zu erhöhen. Dies wird erreicht, indem die Simulationsdichte in einen Bereich verschoben wird, der einen großen Beitrag zur

Versagenswahrscheinlichkeit liefert. Hierfür wird ein Vektor von Zufallsvariablen  $\mathbf{Z}$  mit einer Dichteverteilung  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$  eingeführt, dem die gleiche physikalische Bedeutung wie den Basisvariablen zugeordnet ist. Mit dieser Dichteverteilung läßt sich das Integral zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit folgendermaßen formulieren:

$$p_f = \int_{-\infty}^{\infty} I(g(\mathbf{z})) \frac{f_{\mathbf{Y}}(\mathbf{z})}{h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})} h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.32)$$

Der statistische Schätzer für die Versagenswahrscheinlichkeit lautet dann für  $N$  Stichproben [60]:

$$\hat{p}_f = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( I(g(z_i)) \frac{f_{\mathbf{Y}}(z_i)}{h_{\mathbf{Z}}(z_i)} \right) \quad (2.33)$$

Die Varianz des Schätzers berechnet sich als:

$$\sigma_{p_f}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( I(g(z_i)) \frac{f_{\mathbf{Y}}(z_i)}{h_{\mathbf{Z}}(z_i)} \right)^2 - \hat{p}_f^2 \quad (2.34)$$

Für eine Dichteverteilung  $h_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z})$ , die im sicheren Bereich zu Null wird und im Versagensbereich proportional zur tatsächlichen Versagenswahrscheinlichkeit verläuft, verschwindet die Varianz des Schätzers. Hierfür müßte jedoch die exakte Lösung bereits bekannt sein. Die verschiedenen Varianten der gewichteten Monte Carlo Simulation zielen darauf ab, diese ideale Simulationsdichte anzunähern.

Beim Konzept *Importance Sampling Procedure Using Design Point* [14] werden die Stichproben im Versagensbereich mit der höchsten Wahrscheinlichkeitsdichte konzentriert. Dazu wird zunächst der Bemessungspunkt nach Verfahren 1. Ordnung ermittelt, vgl. Kap. 2.3.2. Die Gewichtsfunktion wird normalverteilt angenommen. Der Erwartungswert der Simulationsdichte wird in den Bemessungspunkt gelegt. Die zweiten Momente entsprechen im wesentlichen der Originaldichteverteilung, unter Umständen ist das Verhältnis zu den Basisvariablen leicht zu ändern. Dieses Verfahren kam zunächst im Programm ISPUD [14] zur Anwendung.

Bei der Strategie des *Adaptive Sampling* [21] werden nach einer direkten Monte Carlo Simulation die ersten beiden statischen Momente der im Versagensbereich liegenden Realisationen bestimmt.

$$\bar{\mathbf{z}} = E[\mathbf{y} | I(g(\mathbf{y})) < 0] \quad (2.35)$$

$$\mathbf{C}_{zz} = E[\mathbf{y}\mathbf{y}^T | I(g(\mathbf{y})) < 0] - \bar{\mathbf{z}}\bar{\mathbf{z}}^T \quad (2.36)$$

In einem nächsten Lauf werden diese Momente für die Beschreibung einer normalverteilt angenommenen Gewichtsfunktion herangezogen. Hierfür wird u.U. die erste Simulation mit erhöhten Varianzen durchgeführt. Das Verfahren kann mehrfach wiederholt werden. In der Regel stellt sich nach 3 bis 4 Berechnungsgängen Konvergenz ein. Der Erwartungswert  $\bar{z}$  läßt sich als der Schwerpunkt der im Versagensbereich liegenden Realisationen interpretieren.

# Kapitel 3

## Stabilitätsberechnung für perfekte und imperfekte Systeme

### 3.1 Einführung

Für elastische Probleme wird das Tragverhalten einer Struktur vor allem über Last-Verschiebungsverläufe beschrieben. Prinzipiell können diese ein- oder mehrdeutig sein. Sofern Mehrdeutigkeiten auftreten, existieren zu einem Lastniveau mehrere mögliche Gleichgewichtslagen. Diese Gleichgewichtslagen können im Unterschied zum monoton ansteigenden Fall stabil oder instabil sein. Die Kenntnis des Strukturverhaltens im Grenzlastbereich ist für die Auslegung von entscheidender Bedeutung.

Für eine Untersuchung ist zunächst die Definition eines Stabilitätskriteriums erforderlich. Ein erster Schritt zur Beschreibung des Tragverhaltens einer stabilitätsgefährdeten Struktur besteht dann in der Bestimmung des kritischen Punktes sowie der Klassifizierung des Stabilitätsproblems. Während sich bei einem Durchschlagsproblem die Mehrdeutigkeit durch ein relatives Maximum in der Last-Verschiebungskurve ergibt, ist ein Verzweigungsproblem durch die Überschneidung mehrerer Gleichgewichtspfade gekennzeichnet. Für jeden Lösungspfad liegt eine andere Last - Verschiebungscharakteristik vor. Durchschlagspunkte stellen immer instabile Gleichgewichtslagen dar, bei Verzweigungspunkten muß das Nachbeulverhalten der Struktur untersucht werden, um zu entscheiden, ob die Gleichgewichtslage stabil oder instabil ist [25, 59, 76]. Die Nachbeulanalyse ermöglicht eine Einteilung in stets instabile asymmetrische und symmetrisch



stabile sowie symmetrisch instabile Verzweigungspunkte.

Geometrische Imperfektionen können bei Stabilitätsproblemen einen großen Einfluß auf das Tragverhalten der Struktur haben. Für Untersuchungen der Imperfektionsempfindlichkeit stellt sich zunächst die Frage nach der Auswahl der zu untersuchenden Imperfektionsformen. Sofern die Imperfektionsform nicht aus Messungen bekannt ist z.B. [6], werden häufig Verschiebungsvektoren, Eigenvektoren der Steifigkeitsmatrix oder deren Überlagerung [59, 77] gewählt. Letztlich ist die Wahl der Imperfektionsform jedoch heuristisch begründet. Meist kann keine Aussage über die Auftretenswahrscheinlichkeit der Imperfektionsform getroffen werden. Wenn wie in in Kap. 2.1 dargelegt, Zufallsfelder zur Beschreibung der Imperfektionen eingesetzt werden, werden auf systematische Weise Imperfektionsformen ermittelt, denen ein probabilistisches Gewicht zugeordnet ist. Die Stabilitätsanalysen können dann für diese Imperfektionsformen durchgeführt werden.

Die Bestimmung der kritischen Last der imperfekten Struktur kann prinzipiell durch Indifferenzenverfahren bzw. Pfadverfolgung am imperfekten System selbst erfolgen. Sollen viele Imperfektionsformen untersucht werden, erweist sich diese Vorgehensweise häufig als zu aufwendig. Mit einem Störungsansatz kann der Imperfektionseinfluß auf das Tragverhalten der Struktur am kritischen Punkt der perfekten Struktur erfolgen. Diese Ableitungen, die auf KOITER zurückgehen [25, 26, 72], erlauben eine numerisch sehr effiziente Abschätzung der Traglast des imperfekten Systems, da die aufwendige Berechnung des kritischen Punktes lediglich einmal an der perfekten Struktur durchgeführt werden muß. Die asymptotischen Ableitungen führen jedoch nur für Imperfektionen mit vergleichsweise geringer Amplitude zu richtigen Ergebnissen. Für Schalentragerwerke wird in [26, 77] eine Maximalamplitude von 20% – 30% der Wandstärke zugelassen. Für größere Imperfektionsamplituden bedarf die Bestimmung der Traglast einer nichtlinearen Berechnung bei entsprechend höherem Aufwand. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit der imperfekten Struktur zu einem definierten Lastniveau, wie in Kap. 2.3.2 beschrieben, erfolgt durch eine kombinierte Vorgehensweise. Die asymptotische Imperfektionsanalyse dient als strukturmechanisch orientiertes Entscheidungskriterium zur Auswahl von Imperfektionsformen mit vergleichsweise großem Einfluß auf das Traglastverhalten. Für die so ausgewählten Imperfektionsformen wird eine nichtlineare Stabilitätsanalyse durchgeführt.

Um den Grenzzustand des Systems (vgl. Kap. 2.3.1) zu beschreiben, wird nach der Amplitude der jeweiligen Imperfektionsform gesucht, für die am definierten Lastzustand gerade Stabilitätsversagen vorliegt. Mit den Imperfektionsgesetzen

liegt ein funktionaler Zusammenhang zwischen Imperfektionsamplitude und kritischer Last vor. Damit kann der Grenzzustand ermittelt werden. Für die explizite nichtlineare Berechnung des Grenzzustandes am imperfekten System werden Pfadverfolgungstechniken zusammen mit einem Bisektionsalgorithmus oder einem Interpolationsverfahren gekoppelt. Der Aufwand dieser Berechnungen ist damit entsprechend hoch.

Das Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Die ersten Unterkapitel beschreiben analytische Ableitungen des Nachbeulverhaltens und des Imperfektionseinflusses. Im Rahmen der numerischen Umsetzung werden Pfadverfolgungsalgorithmen beschrieben. Anschließend wird auf Verfahren zur Bestimmung des kritischen Punktes eingegangen.

## 3.2 Singuläre Punkte

Die Definition eines Stabilitätskriteriums bildet die Grundlage für eine Stabilitätsberechnung. Nach dem Stabilitätskriterium von LIAPUNOV gilt ein Zustand als stabil [15, 58] sofern kleine Störbewegungen einer Gleichgewichtslage für alle Zeiten klein bleiben, andernfalls gilt die Gleichgewichtslage als instabil. Eine asymptotische Stabilität impliziert, daß nach einer beliebigen Störung wiederum dieselbe Gleichgewichtslage erreicht wird. Dieses Stabilitätskriterium ist ein kinetisches. Nach dem Stabilitätskriterium von EULER [15, 58] ist die Stabilitätsgrenze erreicht, sofern neben der ursprünglichen Gleichgewichtslage noch eine weitere Gleichgewichtslage auf gleichem Lastniveau existiert. Damit läßt sich für statische Berechnungen ein Stabilitätskriterium formulieren. Grundlage der folgenden Ableitungen sind die Gleichgewichtsbedingungen, die hier über einen Pfadparameter  $t$  parametrisiert sind:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}(\mathbf{U}(t)) - \lambda(t) \mathbf{P} = 0 \quad (3.1)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen werden in eine Reihe entwickelt.

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_0 + \frac{d\mathbf{G}}{dt}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\mathbf{G}}{dt^3}\Delta t^3 + \dots = \mathbf{0} \quad (3.2)$$

Sofern der Entwicklungspunkt ein Gleichgewichtspunkt ist, verschwindet der Term  $\mathbf{G}_0$ . Für hinreichend kleine, aber beliebige  $\Delta t$  müssen dann die verbleibenden Terme aus Gl. 3.2 einzeln verschwinden. Dies erlaubt Aussagen bezüglich Steigung,

Krümmung etc. des, bzw. der Gleichgewichtspfade zu treffen. Zunächst wird die erste Ableitung betrachtet:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} - \mathbf{P} \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (3.3)$$

Die partielle Ableitung der Rückstellkräfte nach den Verschiebungen, wird als tangentielle Steifigkeitsmatrix ( $\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{U}}$ ) bezeichnet. Sofern zum vorhandenen Lastniveau mehrere Gleichgewichtslagen vorliegen, ist die Inverse der Steifigkeitsmatrix nicht mehr eindeutig [18, 76]. Numerisch bedeutet dies, daß die Steifigkeitsmatrix im indifferenten Punkt eine verschwindende Determinante besitzt.

$$\det(\mathbf{K}) = 0 \quad (3.4)$$

Für die folgenden Ausführungen sollen generalisierte Koordinaten  $\mathbf{Z}$  eingeführt werden. Diese Koordinaten sind über eine lineare Beziehung mit den Knotenverschiebungen verbunden:

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{Z} \quad (3.5)$$

sofern  $\Phi$  eine orthonormale Matrix darstellt, gilt:

$$\mathbf{Z} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (3.6)$$

Der hochgestellte Index  $^T$  bedeutet dabei die Transponierte. Die Transformationsmatrix  $\Phi$  wird so gewählt, daß die Steifigkeitsmatrix diagonalisiert wird.

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \text{diag}(\mu_i) \quad (3.7)$$

Somit sind  $\Phi_i$  die Eigenvektoren und  $\mu_i$  die Eigenwerte der Steifigkeitsmatrix, die der Größe nach geordnet sind, d.h.  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$ . Durch die Anwendung dieser Koordinatentransformation sowie einer Multiplikation mit  $\Phi^T$  wird Gl. 3.3 entkoppelt:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi \frac{d\mathbf{Z}}{dt} - \Phi^T \mathbf{P} \frac{d\lambda}{dt} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

Für eine einfache Singularität wird der erste Eigenwert zu Null ( $\mu_1 = 0$ ). Die erste Zeile der Gl. 3.8 ermöglicht dann eine Klassifizierung der singulären Punkte in Durchschlags- und Verzweigungspunkte, siehe Abb. 3.1:

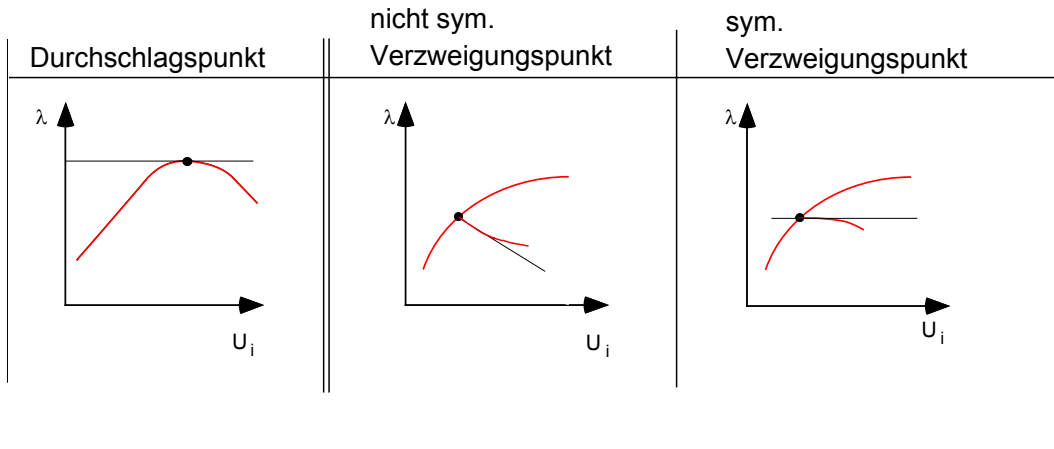


Abbildung 3.1: Durchschlags- und Verzweigungspunkt

$$\Phi_1^T \mathbf{P} \frac{d\lambda}{dt} = 0 \quad (3.9)$$

Durchschlagspunkte sind durch eine horizontale Tangente im Last-Verschiebungsverhalten gekennzeichnet. In diesem Fall gilt  $\frac{d\lambda}{dt} = 0$  sowie  $\Phi_1^T \mathbf{P} \neq 0$ . Anderenfalls ( $\frac{d\lambda}{dt} \neq 0$ ) muß  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 0$  gelten. Die Orthogonalität von Beul- und Lastvektor stellt eine notwendige Bedingung für einen Verzweigungspunkt dar.

### 3.3 Asymptotisches Nachbeulverhalten

Die Nachbeulanalyse [25, 76] stellt eine asymptotische Näherung des sekundären Gleichgewichtspfades in einem Verzweigungspunkt dar und ermöglicht eine weitere Klassifizierung in asymmetrische und symmetrische Verzweigungspunkte, vgl. Abb. 3.1. Bei symmetrischen Verzweigungspunkten wird abhängig von der Krümmung des Sekundärpfades weiter zwischen stabilen und instabilen Verhalten unterschieden. Nachdem ein Verzweigungspunkt berechnet ist, kann aus dem Nachbeulverhalten einer Struktur somit entschieden werden, ob eine weitere Laststeigerung unter Umständen möglich oder aber bereits zum Kollaps der Struktur führt. Um zu entscheiden werden die Ableitungen  $\frac{d\lambda_2}{dt}$  bzw.  $\frac{d^2\lambda_2}{dt^2}$  bestimmt (der Index 2 kennzeichnet den Sekundärpfad). Wenn Pfadverfolgungsalgorithmen zur Berechnung der Nachbeulpfade (vgl. Kap. 3.6) herangezogen werden, werden die Ergebnisse der Nachbeulanalyse benötigt, um geeignete Prädiktorschritte für

einen möglichen Pfadwechsel vom Primärpfad auf den Sekundärpfad zu bestimmen.

### 3.3.1 Verzweigungsbeziehung für Einfachverzweigungen

Prinzipiell können an einem Verzweigungspunkt Mehrfachsingularitäten auftreten. In diesem Fall hat die Steifigkeitsmatrix im Verzweigungspunkt einen  $m$ -fachen Rangabfall ( $m > 1$ ). Mehrfachverzweigungen treten z.B. bei symmetrischen Strukturen unter symmetrischer Belastung auf, was bei technischen Anwendungen häufig der Fall ist. Im folgenden wird zunächst auf einfache Verzweigungspunkte eingegangen. Eine Erweiterung auf Mehrfachsingularitäten bereitet dann keine grundlegenden Schwierigkeiten.

Für Einfachverzweigungen hat die Steifigkeitsmatrix im kritischen Punkt einen einfachen Rangabfall. Nachdem im Verzweigungspunkt sowohl  $\mu_1 = 0$  als auch  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 0$  gilt, ist die erste Zeile von Gl. 3.8 für beliebige Werte  $\frac{dZ_1}{dt}$  erfüllt, während  $\frac{dZ_2}{dt}, \dots, \frac{dZ_n}{dt}$  weiterhin bestimmt werden können.

$$\frac{dZ_1}{dt} = \alpha \quad \text{mit} \quad \alpha \in \mathbf{R} \quad (3.10)$$

$$\frac{dZ_i}{dt} = \frac{1}{\mu_i} \Phi_i^T \mathbf{P} \frac{d\lambda}{dt} \quad \text{mit} \quad i \neq 1 \quad (3.11)$$

Eine Rücktransformation in das kartesische Koordinatensystem (Gl. 3.5) ergibt dann:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \Phi \left[ 0, \frac{dZ_2}{dt}, \dots, \frac{dZ_n}{dt} \right]^T \frac{d\lambda}{dt} + \alpha \Phi_1 \quad (3.12)$$

bzw. :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{U}^* \frac{d\lambda}{dt} + \alpha \Phi_1 \quad (3.13)$$

Die Struktur kann im Verzweigungspunkt kraftfrei in Richtung des ersten Eigenvektors verschoben werden. Gl. 3.12 stellt eine Beziehung zwischen  $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$  und  $\frac{d\lambda}{dt}$  her. Eine Aussage bezüglich des Terms  $\frac{d\lambda}{dt}$  ist indes noch nicht möglich. Hierfür bedarf es der zweiten Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.2):

$$\frac{d^2 \mathbf{G}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} - \mathbf{P} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}}$  stellt die partielle Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach den Verschiebungen dar, d.h einen Tensor dritter Stufe,  $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$  die Ableitung der Verschiebungen nach dem Pfadparameter  $t$ . Der Ausdruck  $\frac{d\mathbf{K}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt}$  ist dann eine vektorielle Größe, die numerisch bestimmt werden kann, s. Anhang A. Ein Einsetzen von Gl. 3.13 sowie eine Multiplikation mit  $\Phi^T$  liefert dann die folgende Gleichung:

$$\Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \left( \mathbf{U}^* \frac{d\lambda}{dt} + \alpha \Phi_1 \right) \left( \mathbf{U}^* \frac{d\lambda}{dt} + \alpha \Phi_1 \right) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2} - \Phi^T \mathbf{P} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.15)$$

Da im Verzweigungspunkt  $\Phi_1^T \mathbf{K} \Phi_1 = 0$  sowie  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 0$  gilt, entfallen die beiden letzten Terme für die erste Zeile von Gl. 3.15. Somit steht eine skalare quadratische Gleichung zur Verfügung, aus der ein Zusammenhang zwischen  $\frac{d\lambda}{dt}$  und  $\alpha$  abgeleitet werden kann. Folgende Notation wird eingeführt:

$$a_i = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_1 \Phi_1 \quad (3.16)$$

$$b_i = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \Phi_1 \quad (3.17)$$

$$c_i = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \mathbf{U}^* \quad (3.18)$$

Die Ausdrücke  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_1 \Phi_1$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \Phi_1$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \mathbf{U}^*$  stellen wiederum vektorielle Größen dar, die nach Anhang A bestimmt werden. Die Verzweigungsbeziehung läßt sich somit folgendermaßen formulieren:

$$a_1 \alpha^2 + 2b_1 \alpha \frac{d\lambda}{dt} + c_1 \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = 0 \quad (3.19)$$

Die Lösung der Verzweigungsgleichung ist entscheidend von der Determinante  $d = b_1^2 - a_1 c_1$  abhängig. Für  $d > 0$  liegt ein Verzweigungspunkt vor [18, 76]. Andernfalls ( $d < 0$ ) handelt es sich bei der Singularität um einen isolierten Punkt. Isolierte Punkte genügen den Gleichgewichtsbedingungen, liegen aber außerhalb des Lösungspfad [18]. Im Grenzfall ( $d = 0$ ) liegt ein Rückkehrpunkt vor. Auf die Spezialfälle von Rückkehrpunkten und isolierten Punkten soll im weiteren Verlauf nicht weiter eingegangen werden.

Die Lösung von Gl. 3.19 für Verzweigungsprobleme ermöglicht eine Aussage bezüglich des asymptotischen Stabilitätsverhaltens der Struktur am kritischen Punkt. Prinzipiell kann die Verzweigung asymmetrischer als auch symmetrischer Natur sein. Zunächst wird auf den allgemeinen Fall der asymmetrischen Verzweigung eingegangen. Der Sonderfall der symmetrischen Verzweigung wird im Anschluß behandelt.

### 3.3.2 Asymmetrische Verzweigung

Unabhängig vom Wert der Koeffizienten  $a_1, b_1, c_1$  kann eine Lösung von Gl. 3.19 stets in folgender Form angegeben werden.

$$\frac{d\lambda_{1,2}}{dt} = \kappa_{1,2}\alpha \quad (3.20)$$

Für den allgemeinen Fall mit  $a_1 \neq 0, b_1 \neq 0, c_1 \neq 0$  gilt für die Koeffizienten  $\kappa_{1,2}$ :

$$\kappa_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - a_1 c_1}}{c_1} \quad (3.21)$$

Gl. 3.13 lautet somit:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left( \mathbf{U}^* \kappa_{1,2} + \Phi_1 \right) \alpha \quad (3.22)$$

Der betragsmäßig größere Wert der beiden Lösungen liefert die Tangente an den Primärpfad, während der betragsmäßig kleinere auf die Tangente an den Sekundärpfad führt. Mit  $\alpha \in \mathbf{R}$  kann  $\frac{d\lambda_2}{dt}$  negative Werte annehmen. Unsymmetrische Verzweigungspunkte sind somit immer instabil. Für den Sonderfall  $c_1 = 0$ , reduziert sich die Verzweigungsbeziehung (Gl. 3.19) auf:

$$\left( a_1 \alpha + 2b_1 \frac{d\lambda}{dt} \right) \alpha = 0 \quad (3.23)$$

Aufgelöst nach  $\frac{d\lambda}{dt}$  ergibt sich dann der folgende Ausdruck für den Sekundärpfad:

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = \kappa_2 \alpha \quad \text{mit} \quad \kappa_2 = -\frac{a_1}{2b_1} \quad (3.24)$$

Für  $c_1 = 0$  stellt  $\mathbf{U}^*$  die Tangente an den Primärpfad dar. Gl. 3.13 beschreibt dann die Beziehung des Sekundärpfades relativ zum Primärpfad. Diese Annahme stellt die Basis für die Ableitungen von KOITERS Nachbeulanalyse dar, vgl. [59, 76].

Als Lösung der Verzweigungsgleichung erhält man einen relativen Zusammenhang zwischen den Variablen  $\alpha$  und  $\frac{d\lambda_2}{dt}$ . Um z.B. mit Pfadverfolgungsalgorithmen einen Wechsel vom Primärpfad auf den Sekundärpfad vorzunehmen, bedarf es einer weiteren Bedingung wie z.B. der Bogenlängengleichung (vgl. Gl. 3.86) zur Festlegung des Prädiktorschrittes.

### 3.3.3 Symmetrische Verzweigung

Für den Spezialfall  $a_1 = 0$ , d.h. der Ausdruck  $\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_1$  verschwindet, liegt ein symmetrisches Verzweigungsproblem vor. Bei symmetrischen Verzweigungsproblemen gilt somit:

$$\frac{d\lambda_1}{dt} = -\frac{2b_1}{c_1}\alpha \text{ sofern } c_1 \neq 0 \quad (3.25)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = 0 \quad (3.26)$$

Für den Sonderfall  $c_1 = 0$  folgt aus Gl. 3.23 unmittelbar Gl. 3.26. Unabhängig von  $c_1$  gilt somit:

$$\frac{d\mathbf{U}_2}{dt} = \alpha \Phi_1 \quad (3.27)$$

Symmetrische Verzweigungen sind dadurch gekennzeichnet, daß am kritischen Punkt auf dem sekundären Pfad keine Lastveränderung erfolgt, während der Verschiebungszuwachs lediglich in Richtung der Beulform geht. Um zu entscheiden, ob der singuläre Punkt von stabiler oder instabiler Form ist, bedarf es einer Untersuchung der höheren Ableitung der Gleichgewichtsbedingung. Zunächst wird hierfür  $\frac{d\mathbf{U}_2^2}{dt^2}$  berechnet. Für den Sonderfall der symmetrischen Verzweigung lautet Gl. 3.15 somit:

$$\alpha^2 \Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2} - \Phi^T \mathbf{P} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

Mit Gl. 3.16 bis Gl. 3.18:

$$\alpha^2 a_i + \mu_i \frac{d^2 Z_i}{dt^2} - \Phi_i^T \mathbf{P} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 0 \quad (3.29)$$

Da  $\frac{d\mathbf{Z}}{dt}$  und  $\frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2}$  orthogonal sind, besitzt die zweite Ableitung der ersten generalisierten Koordinate keine Anteile im ersten Eigenvektor. Die Auflösung von Gl. 3.29 lautet somit:

$$\frac{d^2 Z_1}{dt^2} = 0 \quad (3.30)$$

$$\frac{d^2 Z_i}{dt^2} = \frac{\Phi_i^T \mathbf{P}}{\mu_i} \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} - \frac{a_i}{\mu_i} \alpha^2 \quad (3.31)$$



Die Transformation auf kartesische Koordinaten liefert:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} = \mathbf{U}^* \frac{d^2\lambda_2}{dt^2} - \Phi \left[ 0, \frac{a_2}{\mu_2}, \dots \right]^T \alpha^2 \quad (3.32)$$

Mit der folgenden Notation,

$$\mathbf{U}^{**} = -\Phi \left[ 0, \frac{a_2}{\mu_2}, \dots \right]^T \quad (3.33)$$

ergibt dies:

$$\frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} = \mathbf{U}^* \frac{d^2\lambda_2}{dt^2} + \mathbf{U}^{**} \alpha^2 \quad (3.34)$$

Für eine Aussage bezüglich des Vorzeichens von  $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$  wird sodann die 3. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.1) herangezogen. Für

$$\frac{d^3\mathbf{G}}{dt^3} = \frac{\partial^2\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}^2} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + 3 \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d^2\mathbf{U}}{dt^2} + \mathbf{K} \frac{d^3\mathbf{U}}{dt^3} - \mathbf{P} \frac{d^3\lambda}{dt^3} = \mathbf{0} \quad (3.35)$$

Für die symmetrische Verzweigung kann  $\frac{d\mathbf{U}}{dt}$  durch  $\alpha\Phi_1$  ersetzt werden, s. Gl. 3.13. Eine Multiplikation mit  $\Phi^T$  von links ermöglicht aus der ersten Zeile des so entstehenden Gleichungssystems nach  $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$  aufzulösen. Folgende Notation wird dabei eingeführt:

$$e_1 = \Phi_1^T \frac{\partial^2\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}^2} \Phi_1 \Phi_1 \Phi_1 \quad (3.36)$$

$$f_1 = \Phi_1^T \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}} \Phi_1 \mathbf{U}^{**}, \quad (3.37)$$

Der Ausdruck  $\frac{\partial^2\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}^2}$  stellt die zweite partielle Ableitung der Steifigkeitsmatrix nach den Verschiebungen und damit einen Tensor vierter Stufe dar.  $\frac{\partial^2\mathbf{K}}{\partial\mathbf{U}^2} \Phi_1 \Phi_1 \Phi_1$  wird wiederum als vektorielle Größe interpretiert werden, die numerisch Wege bestimmt wird, s. Anhang A. Damit ergibt sich dann für  $\frac{d^2\lambda}{dt^2}$  (für  $\alpha \neq 0$ ):

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{e_1 + 3f_1}{3b_1} \quad (3.38)$$

Unabhängig von  $\alpha$  kann anhand der Koeffizienten  $b_1, e_1, f_1$  auf das Vorzeichen der Krümmung des Sekundärpfades geschlossen werden. Dies ermöglicht zwischen symmetrisch-stabilen ( $\frac{d^2\lambda}{dt^2} > 0$ ) und symmetrisch-instabilen ( $\frac{d^2\lambda}{dt^2} < 0$ ) Verzweigungspunkten zu unterscheiden.

### 3.4 Asymptotische Imperfektionsempfindlichkeit

Der Einfluß der geometrischen Imperfektionen auf die kritische Traglast kann durch einen Störungsansatz dargestellt werden. Damit soll zunächst untersucht werden, welche Imperfektionsformen einen großen Einfluß auf die Versagenswahrscheinlichkeit haben. Gleichzeitig ist auch eine approximative quantitative Aussage bezüglich des Grenzzustandes des imperfekten Systems möglich. Der Zusammenhang zwischen geometrischen Imperfektionen und dem elastischen Stabilitätsverhalten einer Struktur wurde bereits 1945 von KOITER untersucht [25, 72]. Derartige Ansätze sind zusammen mit der Methode der Finiten Elemente gerade in letzter Zeit wieder aufgegriffen worden [59, 62, 63].

Für die folgenden Ableitungen wird eine Imperfektion  $\mathbf{x}$  durch eine Amplitude  $\beta$  und eine normierte Imperfektionsform  $\mathbf{x}_0$  dargestellt.

$$\mathbf{x} = \beta \mathbf{x}_0 \quad (3.39)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des imperfekten Systems sind von den Verschiebungen  $\mathbf{U}$ , dem Lastfaktor  $\lambda$  sowie der Imperfektionsamplitude  $\beta$  abhängig. Die Imperfektionsgesetze von KOITER [25, 26, 59, 72] basieren auf einer Taylorentwicklung dieser Gleichgewichtsbedingungen nach  $\beta$ ,  $\lambda$  und  $\mathbf{U}$  um den kritischen Punkt des perfekten Systems. Es wird davon ausgegangen, daß für das perfekte System eine weitere Gleichgewichtslage auf gleichem Lastniveau auf einem zweiten Lösungspfad existiert und es sich damit um einen Verzweigungspunkt handelt. Die Verschiebungs- und Lastinkremente aus der TAYLOR-Entwicklung werden nochmals in eine asymptotische Reihe der folgenden Form entwickelt.

$$\Delta \mathbf{U} = \alpha \mathbf{U}_1 + \alpha^2 \mathbf{U}_2 + \alpha^3 \mathbf{U}_3 + \dots \quad (3.40)$$

$$\Delta \lambda = \alpha \lambda_1 + \alpha^2 \lambda_2 + \alpha^3 \lambda_3 + \dots \quad (3.41)$$

Der skalare Parameter  $\alpha$  wird als inneres Produkt von  $\Delta \mathbf{U}$  mit  $\mathbf{U}_1$  definiert. Die Imperfektionsamplitude  $\beta$  wird durch folgenden exponentiellen Ansatz ebenfalls in  $\alpha$  dargestellt.

$$\beta = \zeta \alpha^\gamma \quad (3.42)$$

Der Exponent  $\gamma > 0$  wird ganzzahlig, abhängig vom Typ des Verzweigungsproblems - für asymmetrische Verzweigungen zu  $\gamma = 2$ , bzw. für symmetrische Verzweigungen zu  $\gamma = 3$  - gewählt. Nachdem für beliebiges  $\alpha$  alle Potenzen einzeln

zu Null werden müssen, können die so entstehenden Gleichungen rekursiv nach  $\lambda_1, \mathbf{U}_1$  sowie  $\lambda_2, \mathbf{U}_2, \dots$  aufgelöst werden. Wenn der Parameter  $\zeta$  wieder durch Gl. 3.42 ausgedrückt wird, wird eine Funktion  $\lambda(\alpha)$  formuliert, deren Maximum die kritische Last der imperfekten Struktur darstellt. In  $\lambda(\alpha)$  treten Steigungs- und Krümmungskoeffizienten für den Gleichgewichtspfad der perfekten Struktur auf. Damit werden die kritischen Lasten des imperfekten Systems eine Funktion des Nachbeulverhaltens der perfekten Struktur.

Die folgenden Ausführungen zeigen eine alternative Ableitung der Imperfektionsgesetze. Die Beziehungen werden an Hand der Gleichgewichtsbedingungen sowie der Singularitätsbedingung der imperfekten Struktur formuliert [59]. Die Entwicklung ist folgerichtig für Durchschlags- und Verzweigungsprobleme möglich.

### 3.4.1 Grundlagen zur Herleitung der Imperfektionsgesetze

Analog zu Kap. 3.3 beruhen die Ansätze auf einer Entwicklung der Gleichgewichtsbedingungen am kritischen Punkt, wobei jetzt zusätzlich noch die Imperfektionsamplitude  $\beta$  berücksichtigt wird. Die Gleichgewichtsbedingungen lauten in diesem Fall:

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}(\mathbf{U}(t), \beta(t)) - \lambda(t) \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.43)$$

Als weitere Ausgangsgleichung dient die Singularitätsbedingung in folgender Form:

$$\mathbf{S} = \mathbf{K}(\mathbf{U}(t), \beta(t)) \Phi_1(t) = \mathbf{0} \quad (3.44)$$

Sowohl Gl. 3.43 als auch Gl. 3.44 werden in eine Reihe um den kritischen Punkt (Index c) entwickelt:

$$\mathbf{G} = \mathbf{G}_c + \frac{d\mathbf{G}_c}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{G}_c}{dt^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\mathbf{G}_c}{dt^3} \Delta t^3 + \dots \quad (3.45)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_c + \frac{d\mathbf{S}_c}{dt} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{d^2\mathbf{S}_c}{dt^2} \Delta t^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3\mathbf{S}_c}{dt^3} \Delta t^3 + \dots \quad (3.46)$$

Am kritischen Punkt gilt  $\mathbf{G}_c = \mathbf{S}_c = \mathbf{0}$ . Nachdem Gl. 3.45 sowie Gl. 3.46 für beliebige, hinreichend kleine  $\Delta t$  gelten, müssen jeweils die Einzeltermine verschwinden. Die Amplitude  $\beta$  sowie der Lastfaktor  $\lambda$  werden formal ebenfalls in eine Reihe

entwickelt:

$$\beta = \frac{d\beta}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\beta}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\beta}{dt^3}\Delta t^3 \dots \quad (3.47)$$

$$\lambda = \lambda_c + \frac{d\lambda}{dt}\Delta t + \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{dt^2}\Delta t^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3\lambda}{dt^3}\Delta t^3 \dots \quad (3.48)$$

Zur Ableitung der Imperfektionsgesetze wird nun der erste, von Null verschiedene Term für Gl. 3.47 und Gl. 3.48 ermittelt. Eine Elimination des Pfadparameters  $\Delta t$  führt dann direkt auf eine Beziehung zwischen der kritischen Last des imperfekten Systems und der Imperfektionsamplitude. Dazu werden jeweils die  $n$ -te Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen Gl. 3.45 sowie die  $(n - 1)$ -te Ableitung der Singularitätsbedingung Gl. 3.46 (mit  $n = 1, 2, \dots$ ) betrachtet.

Zunächst werden die ersten Ableitungen der Gleichgewichtsbedingung Gl. 3.43 sowie die Singularitätsbedingung Gl. 3.44 herangezogen:

$$\frac{d\mathbf{G}_c}{dt} = \mathbf{K}\frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\lambda}{dt}\mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (3.49)$$

Eine Multiplikation von Gl. 3.49 mit  $\Phi^T$  und eine Transformation  $\mathbf{U} = \Phi\mathbf{Z}$  mit  $\Phi^T\mathbf{K}\Phi = \text{diag}(\mu_i)$  ergibt die folgenden, voneinander entkoppelten Gleichungen:

$$\mu_i\frac{dZ_i}{dt} + \Phi_i^T\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} = \Phi_i^T\mathbf{P}\frac{d\lambda}{dt} \quad (3.50)$$

Im singulären Punkt gilt  $\mu_1 = 0$  und damit die Beziehung:

$$\Phi_1^T\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} = \Phi_1^T\mathbf{P}\frac{d\lambda}{dt} \quad (3.51)$$

Zunächst soll davon ausgegangen werden, daß ein Durchschlagsproblem vorliegt und somit  $\Phi_1^T\mathbf{P} \neq 0$  gilt:

### 3.4.2 Durchschlagsprobleme

In diesem Fall kann Gl. 3.51 unmittelbar nach  $\frac{d\lambda}{d\beta}$  aufgelöst werden:

$$\frac{d\lambda}{d\beta} = \frac{\Phi_1^T\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial\beta}}{\Phi_1^T\mathbf{P}} \quad (3.52)$$

Für Durchschlagsprobleme ergibt sich für eine vorgegebene Imperfektionsamplitude folgende Näherungslösung für die kritische Last des imperfekten Systems.

$$\lambda - \lambda_c = \frac{\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{\Phi_1^T \mathbf{P}} \beta \quad (3.53)$$

Sofern  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 0$  gilt, liegt ein Verzweigungsproblem vor. Zunächst soll auf den allgemeinen Fall der asymmetrischen Verzweigung eingegangen werden.

### 3.4.3 Asymmetrische Verzweigungen

Für Verzweigungsprobleme gilt  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 0$ , somit reduziert sich Gl. 3.51 zu:

$$\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \frac{d\beta}{dt} = 0 \quad (3.54)$$

Sofern die Rückstellkräfte nicht orthogonal zum Beulvektor sind, d.h.  $\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \neq 0$ , muß  $\frac{d\beta}{dt} = 0$  gelten. Für diesen Fall besitzt die Ableitung  $\frac{d\lambda}{d\beta} = 0$  offensichtlich einen infiniten Wert. Kleine Imperfektionen haben somit eine vergleichbar große Auswirkung auf die kritische Last. Im folgenden soll der Sonderfall  $\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} = 0$  durch  $\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \rightarrow 0$  approximiert werden. Mit einem verschwindenden  $\frac{d\beta}{dt}$ -Term reduziert sich die 1. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen des imperfekten Systems (Gl. 3.49) dann auf die des perfekten Systems, vgl. Gl. 3.3. Gl. 3.13 stellt in diesem Fall die Lösung für das gesuchte Verschiebungsinkrement dar. Für eine Aussage bezüglich des Imperfektionsverhaltens wird auf die 2. Ableitung der Gleichgewichtsbedingung sowie die 1. Ableitung der Singularitätsbedingung zurückgegriffen. Diese lauten für den Sonderfall  $\frac{d\lambda}{d\beta} = 0$ :

$$\frac{d^2 \mathbf{G}}{dt^2} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \mathbf{K} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \frac{d^2 \beta}{dt^2} - \mathbf{P} \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.55)$$

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Phi_1 + \mathbf{K} \frac{d\Phi_1}{dt} = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

Die Terme  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt}$  sowie  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \Phi_1$  werden nach Anhang A bestimmt. Einsetzen von Gl. 3.13 in die erste Ableitung der Singularitätsbedingung, Gl. 3.56 und eine Multiplikation mit dem Beulvektor  $\Phi_1^T$  ermöglicht dann direkt nach dem Term  $\frac{d\lambda}{dt}$

aufzulösen. Wenn Gl. 3.16 bis Gl. 3.18 verwendet werden, ergibt sich:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\alpha \frac{a_1}{b_1} \quad (3.57)$$

Interessanterweise stellt dies genau den doppelten Wert des  $\frac{d\lambda}{dt}$ -Terms des Sekundärpfades für das perfekte System dar. Das Verschiebungsinkrement lautet somit:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \left( -\frac{a_1}{b_1} \mathbf{U}^* + \Phi_1 \right) \alpha \quad (3.58)$$

Der Term  $\frac{d^2\beta}{dt^2}$  wird aus der zweiten Ableitung der Gleichgewichtsbeziehung bestimmt. Gl. 3.55 wird mit  $\Phi^T$  multipliziert, wiederum werden generalisierte Koordinaten verwendet. Mit Gl. 3.58 sowie Gl. 3.16 bis Gl. 3.18 folgt dann:

$$\alpha^2 \left( a_i - 2\frac{a_1}{b_1}b_i + \frac{a_1^2}{b_1^2}c_i \right) + \mu_i \frac{d^2Z_i}{dt^2} + \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \frac{d^2\beta}{dt^2} - \Phi_i^T \mathbf{P} \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.59)$$

Für  $i = 1$  kann direkt nach  $\frac{d^2\beta}{dt^2}$  aufgelöst werden. Nach kurzer Umformung ergibt sich:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \alpha^2 \frac{a_1 \left( 1 - \frac{a_1 c_1}{b_1^2} \right)}{\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}} \quad (3.60)$$

Zur Berechnung der Änderung der kritischen Last werden die Reihenentwicklungen Gl. 3.47 nach dem zweiten sowie Gl. 3.48 nach dem ersten Term abgebrochen. Eine Elimination des Pfadinkrements  $\Delta t$  ergibt dann den folgenden einfachen Zusammenhang zwischen kritischer Last des imperfekten Systems und der Imperfektionsamplitude:

$$\lambda = \lambda_c - 2 \sqrt{\frac{a_1}{2b_1} \frac{1}{1 - \frac{a_1 c_1}{b_1^2}} \frac{\beta \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{b_1}} \quad (3.61)$$

Der Faktor  $\frac{a_1}{2b_1}$  stellt die Steigung des Sekundärpfades im kritischen Punkt für den Fall  $c_1 = 0$  dar. Im Vergleich zu den in [25, 26, 72] angegebenen Ausdrücken tritt in Gl. 3.61 zusätzlich noch der Term  $\frac{1}{1 - \frac{a_1 c_1}{b_1^2}}$  auf. Die in der Literatur angegebenen

Ableitungen beziehen den Sekundärpfad stets auf den Primärpfad, was in der Verzweigungsbeziehung jedoch nicht notwendigerweise der Fall sein muß. Für den Sonderfall  $c_1 = 0$ , was dann einem Bezug des Sekundärpfades auf den Primärpfad entspricht [76], vgl. Kap. 3.3.3, sind die Beziehungen identisch.

### 3.4.4 Symmetrische Verzweigungen

Für symmetrische Verzweigungen gilt  $a_1 = 0$ , vgl. Kap. 3.3.3, und damit nach Gl. 3.60  $\frac{d^2\beta}{dt^2} = 0$ . Somit ist mit Gl. 3.61 noch keine Aussage bezüglich des Imperfektionsverhaltens möglich. Für symmetrische Verzweigungspunkte entsprechen die Gleichgewichtsbeziehungen des imperfekten denen des perfekten Systems bis zu den Ableitungen zweiter Ordnung! Damit ergeben sich für den Ausdruck  $\frac{d^2U}{dt^2}$  die bereits in Gl. 3.32 ermittelte Beziehung.

Aus Gl. 3.56 kann zunächst die Änderung des 1. Eigenvektors berechnet werden.

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = -\alpha\Phi \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\mu_2 \\ 1/\mu_{\dots} \end{bmatrix} \Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_1 \Phi_1 \quad \text{mit} \quad \frac{d\Phi_1^T}{dt} \Phi_1 = 0 \quad (3.62)$$

Ein Vergleich mit Gl. 3.28 und Gl. 3.33 zeigt, daß  $\frac{d\Phi_1}{dt} = \alpha \mathbf{U}^{**}$  gilt. Nun wird für symmetrische Verzweigungspunkte die 3. Ableitung der Gleichgewichtsbedingung und die 2. Ableitung der Singularitätsbeziehung betrachtet:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + 3 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} + \mathbf{K} \frac{d^3 \mathbf{U}}{dt^3} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta} \frac{d^3 \beta}{dt^3} - \mathbf{P} \frac{d^3 \lambda}{dt^3} = \mathbf{0} \quad (3.63)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\mathbf{U}}{dt} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} \right] \Phi_1 + 2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \frac{d\mathbf{U}}{dt} \frac{d\Phi_1}{dt} + \mathbf{K} \frac{d^2 \Phi_1}{dt^2} = \mathbf{0} \quad (3.64)$$

Ein Einsetzen der Verschiebungsbeziehung in die mit  $\Phi_1$  multiplizierte 2. Ableitung der Singularitätsbedingung, Gl. 3.64, erlaubt dann direkt nach  $\frac{d^2 \lambda}{dt^2}$  aufzulösen. Mit den Abkürzungen Gl. 3.36, Gl. 3.37 ergibt sich dann:

$$\frac{d^2 \lambda}{dt^2} = -\alpha^2 \frac{e_1 + 3f_1}{b_1} \quad (3.65)$$

Dies entspricht der dreifachen Krümmung des Sekundärpfades des perfekten Systems, vgl. Gl. 3.38. Die 2. Ableitung der Verschiebungen lautet somit:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \alpha^2 \left( -\frac{e_1 + 3f_1}{b_1} \mathbf{U}^* + \mathbf{U}^{**} \right) \quad (3.66)$$

Für eine Bestimmung des Ausdrucks  $\frac{d^3 \beta}{dt^3}$  werden die 3. Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen herangezogen. Durch Multiplikation von Gl. 3.63 mit  $\Phi_1^T$  kann direkt nach dem gesuchten Term aufgelöst werden. Nach kurzer Umformung ergibt sich:

$$\frac{d^3 \beta}{dt^3} = \alpha^3 \frac{2(e_1 + 3f_1)}{\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}} \quad (3.67)$$

Somit sind die Terme  $\frac{d^2 \lambda}{dt^2}$  und  $\frac{d^3 \beta}{dt^3}$  bekannt. Zur Berechnung der kritischen Last des imperfekten Systems werden die Reihenentwicklungen Gl. 3.47 nach dem dritten sowie Gl. 3.48 nach dem zweiten Term abgebrochen. Eine Elimination des Pfadparameters  $\Delta t$  ergibt dann das Imperfektionsgesetz für symmetrische Verzweigungen.

$$\lambda = \lambda_c - \frac{e_1 + 3f_1}{2b_1} \left( \frac{3\beta \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{e_1 + 3f_1} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.68)$$

Die asymptotische Beziehung ist sowohl für stabile als auch instabile Verzweigungen gültig. Nach kurzer Umformung ergibt sich die folgende Form:

$$\lambda = \lambda_c - 3 \sqrt[3]{\frac{e_1 + 3f_1}{6b_1} \left( \frac{\beta \Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{2b_1} \right)^2} \quad (3.69)$$

Die Reihenentwicklungen in Gl. 3.41 und Gl. 3.48 unterscheiden sich durch den Faktor  $\frac{1}{n!}$ . Der Term  $\frac{e_1 + 3f_1}{6b_1}$  unter dem Wurzelausdruck stellt die halbe Krümmung des Gleichgewichtspfades dar. Gl. 3.69 entspricht damit den auch in [25, 26, 59, 72] angegebenen Formulierungen, siehe hierzu auch [76].

### 3.5 Mehrfachverzweigungen

Für Mehrfachverzweigungen können die in Kap. 3.3 abgeleiteten Beziehungen für die Nachbeulanalyse sowie die in Kap. 3.4 abgeleiteten Imperfektionsgesetze



nicht unmittelbar zur Anwendung gelangen. Zweifachverzweigungen treten beispielsweise bei symmetrischen Strukturen unter symmetrischer Belastung auf. Für technische Anwendungen ist dies häufig der Fall. Beispiele hierfür sind in etwa Kreiszyylinder unter axialer Belastung. Für die folgenden Ableitungen wird dabei davon ausgegangen, daß  $\Phi_i^T \mathbf{P} = 0$  mit  $i = 1, m$ , wobei  $m$  den Rangabfall der Steifigkeitsmatrix darstellt.

### 3.5.1 Unsymmetrische Verzweigungen

Zunächst werden wiederum die Beziehungen am perfekten System betrachtet. Für Gl. 3.13 gilt dann für eine mehrfache Singularität:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{U}^* \frac{d\lambda}{dt} + \sum_{i=1,m} \alpha_i \Phi_i \quad (3.70)$$

mit

$$\mathbf{U}^* = \Phi \left[ 0, \dots, 0, \frac{dz_{m+1}}{dt}, \dots, \frac{dz_n}{dt} \right]^T \quad (3.71)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_i$ ,  $i = 1, m$  unbestimmt sind. Einsetzen der Gl. 3.70 in die 2. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen (Gl. 3.14) liefert letztlich das folgende Gleichungssystem für die Verzweigungsbeziehung, vgl. [76]:

$$\sum_{j,k=1,m} a_{ijk} \alpha_j \alpha_k + 2 \sum_{j=1,m} b_{ij} \alpha_j \frac{d\lambda}{dt} + c_i \left( \frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = 0, \quad i = 1, m \quad (3.72)$$

mit den folgenden Koeffizienten:

$$a_{ijk} = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_j \Phi_k \quad (3.73)$$

$$b_{ij} = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \Phi_j \quad (3.74)$$

$$c_i = \Phi_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \mathbf{U}^* \quad (3.75)$$

Die vektoriellen Terme  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_j \Phi_k$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \Phi_j$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U}^* \mathbf{U}^*$  können wie in Anhang A beschrieben numerisch bestimmt werden. Sofern die Doppelsumme in Gl. 3.72 für beliebige  $\alpha_i$  nicht verschwindet, d.h. mindestens ein  $a_{ijk}$  muß von Null verschieden sein, liegt eine unsymmetrische Verzweigung vor. Damit wird auf das imperfekte System übergegangen und der Rückstellkraftvektor  $\mathbf{R}$  im singulären Zustand

des perfekten Systems bestimmt. Prinzipiell stellen alle Linearkombinationen der Singularitätsvektoren Beulformen dar, für die die Singularitätsbedingung Gl. 3.44 formuliert werden kann:

$$\Phi_M = \sum_{i=1,m} k_i \Phi_i, \quad (3.76)$$

wobei die Norm der Beulform gleich bleiben muß:

$$\sum_{i=1,m} k_i^2 = 1 \quad (3.77)$$

Mit dieser maßgeblichen Beulform wird das Imperfektionsgesetz, wie in Kap. 3.4.3 beschrieben, abgeleitet, wobei  $\Phi_1$  durch  $\Phi_M$  ersetzt wird. Letztlich ergibt sich für asymmetrische Verzweigungen mit einer  $m$ -fachen Singularität die folgende Beziehung, vgl. Gl. 3.61.

$$\lambda = \lambda_c - 2 \sqrt{\frac{a_M}{2b_M} \frac{1}{1 - \frac{a_M c_M}{b_M}} \frac{\beta \Phi_M \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{b_M}} \quad (3.78)$$

Die Koeffizienten  $a_M, b_M, c_M$  hängen über die Gl. 3.73 bis Gl. 3.75 von den Koeffizienten  $k_i, i = 1, m$  und den Nachbeulkoeffizienten des perfekten Systems ( $a_{ijk}, b_{ij}, c_i$  mit  $i, j, k = 1, m$ ) ab. Als die maßgebliche Kombination soll diejenige gelten, für die Gl. 3.78 gerade ein Minimum annimmt. Sofern sämtliche Koeffizienten  $a_{ijk}$  zu Null werden, liegt ein symmetrisches Verzweigungsproblem vor.

### 3.5.2 Symmetrische Verzweigung

Ähnlich wie in Kap. 3.4.4 wird zunächst die Krümmungsbeziehung des Gleichgewichtspfades aus den 2. Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen bestimmt:

$$\frac{d^2 \mathbf{U}}{dt^2} = \mathbf{U}^* \frac{d^2 \lambda}{dt^2} + \sum_{i,j=1,m} \alpha_i \alpha_j \mathbf{U}_{ij}^{**} \quad (3.79)$$

wobei

$$\mathbf{U}_{ij}^{**} = -\Phi \begin{bmatrix} 0 \dots & & & \\ & 0 & & \\ & & 1/\mu_{m+1} & \\ & & & 1/\mu_{\dots} \end{bmatrix} \Phi^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_i \Phi_j \quad (3.80)$$

$$\text{mit } \Phi_i^T \mathbf{U}_{ij}^{**} = \Phi_j^T \mathbf{U}_{ij}^{**} = 0, \quad i, j = 1, m \quad (3.81)$$

Damit kann die 3. Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen herangezogen werden. Letztlich ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\sum_{j,k,l=1,m} (e_{ijkl} + 3f_{ijkl}) \alpha_j \alpha_k \alpha_l + 3 \sum_{j=1,m} b_{ij} \alpha_j \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = 0, \quad i = 1, m \quad (3.82)$$

Dabei soll folgende Notation gelten:

$$e_{ijkl} = \Phi_i \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \Phi_j \Phi_k \Phi_l \quad (3.83)$$

$$f_{ijkl} = \mathbf{U}_{ij}^{**} \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_k \Phi_l \quad (3.84)$$

Die Terme  $\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \Phi_j \Phi_k \Phi_l$ ,  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \Phi_k \Phi_l$  werden entsprechend Anhang A bestimmt. Da Gl. 3.82 aus einer Summe aus Termen besteht, deren Faktoren unbestimmt sind, und nicht wie für Einfachverzweigungen isoliert werden können, vgl. Gl. 3.38, kann die Krümmung der sekundären Gleichgewichtspfade negativ werden. Symmetrische Mehrfachverzweigungen sind daher instabil. Die Last-Imperfektionsbeziehung leitet sich dann analog zu Kap. 3.4.4 ab. D.h. es wird wiederum von den Gleichgewichtsbedingungen und einer Singularitätsbedingung (Gl. 3.43 und Gl. 3.44) ausgegangen. Der Singulärvektor in Gl. 3.44 stellt nun jedoch eine Linearkombination  $\Phi_M$  aller möglichen Singulärvektoren dar! Damit ergibt sich letztlich wieder eine Last-Imperfektionsbeziehung entsprechend Gl. 3.68 wobei die Koeffizienten  $b_1, e_1, f_1$  durch  $b_M, e_M, f_M$  ersetzt werden:

$$\lambda = \lambda_c - \frac{e_M + 3f_M}{2b_M} \left( \frac{3\beta \Phi_M^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}}}{e_M + 3f_M} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (3.85)$$

Die Nachbeulkoeffizienten  $b_M, e_M, f_M$  sind jeweils Linearkombinationen der  $b_{ij}$ , der  $e_{ijkl}$ , sowie der  $f_{ijkl}$ . Damit stellt Gl. 3.85 wieder eine Funktion dar, für die ein Minimum gesucht werden kann.

Diskussionsbeiträge bezüglich des Imperfektionseinflusses bei Mehrfachverzweigungen sind u.a. auch in [25, 39, 40, 42] zu finden. In [25] wird mit einer ähnliche Vorgehensweise, wie in diesem Kapitel vorgeschlagen, auf die gleichen Ergebnisse geschlossen. In [39, 40, 42] erfolgt die Ableitung der Imperfektionsgesetze für Mehrfachverzweigung auf der Basis einer Variationsformulierung. Die Traglast des imperfekten System wird für Konstellationen  $k_i$  erreicht, für die die Steigung

bzw. die Krümmung des perfekten Gleichgewichtspfades im Nachbeulbereich ein Minimum annimmt. Dies entspricht einer Minimierung des Terms  $\frac{e_M + 3f_M}{b_M}$ . Der derartig bestimmte Wert ist damit höher als der nach Gl. 3.85. Es bleibt zu untersuchen, inwieweit eine Wichtung bezüglich des Einflusses der Imperpektionsformen auf die Traglast mit beiden Varianten möglich ist.

### 3.6 Gleichgewicht und Pfadverfolgung

Für nichtlineare Vorbeulzustände kann das Stabilitätsverhalten der Struktur mit Hilfe von Pfadverfolgungsalgorithmen begleitend untersucht [64, 76] werden. Im folgenden werden die Methoden, wie sie in der vorliegenden Arbeit angewendet wurden, skizziert.

Pfadverfolgungsalgorithmen stellen zweistufige inkrementell-iterative Verfahren dar, um an diskreten Punkten des Kraft-Verschiebungsverlaufs Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen. Ausgehend von einem bekannten Gleichgewichtspunkt erfolgt zunächst ein Prädiktorschritt. In der darauffolgenden Korrektorphase werden Gleichgewichtsiterationen mit Hilfe des Newton - Verfahrens ausgeführt, um einen neuen Gleichgewichtspunkt zu bestimmen (siehe Abb. 3.2).

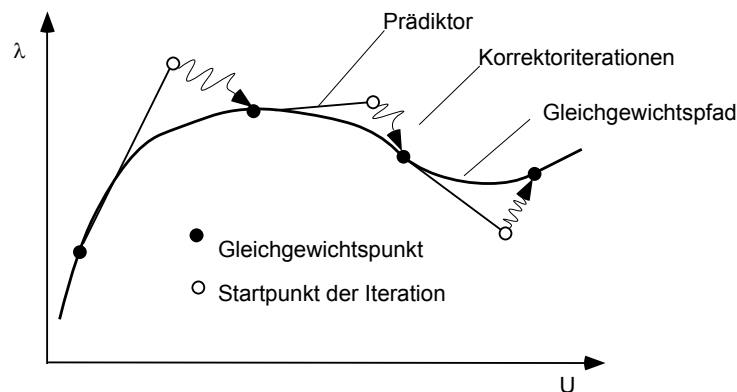


Abbildung 3.2: Prädiktor-Korrektor-Verfahren

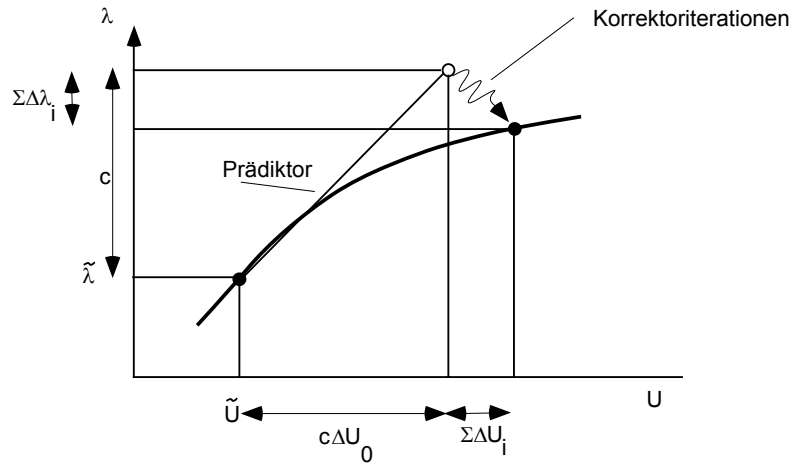


Abbildung 3.3: Prädiktor

### 3.6.1 Prädiktorschritt

Der Prädiktorschritt stellt im einfachsten Fall eine tangentielle Fortsetzung der Last-Verschiebungsbeziehung an einem bekannten Gleichgewichtspunkt  $\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\lambda}$  (siehe Abb. 3.3) dar:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{U}_{pr} \\ \lambda_{pr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}} \\ \tilde{\lambda} \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U}_0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

Das Verschiebungsinkrement  $\Delta \mathbf{U}_0$  resultiert aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{U}_0 = \mathbf{P}, \quad (3.87)$$

wobei  $\mathbf{K}$  die tangentielle Steifigkeitsmatrix im Gleichgewichtspunkt darstellt. Der Faktor  $c$  in Gl. 3.86 skaliert den Prädiktorschritt über die Vorgabe eines Lastschrittes, einer Verschiebungsnorm oder einer Bogenlänge:

Lastschritt	Verschiebung	Bogenlänge
$c = \Delta \lambda_{step}$	$c = \frac{\ \Delta \mathbf{U}_{step}\ }{\ \Delta \mathbf{U}_0\ }$	$c = \frac{s_{step}}{\sqrt{\ \Delta \mathbf{U}_0\ ^2 + \Psi^2 \Delta \lambda^2}}$

Der Parameter  $\Psi$  zur Beschreibung der Bogenlänge stellt einen Skalierungsfaktor dar, dessen Eigenschaften am Ende dieses Abschnitts diskutiert werden. Für stark nichtlineare Probleme können Prädiktorschritte, die die Krümmung des Gleichgewichtspfades berücksichtigen, vorteilhaft sein [76].

### 3.6.2 Korrektoriterationen

Korrektoriterationen führen das System nach dem Prädiktorschritt wieder auf einen Gleichgewichtszustand zurück. Den Gleichgewichtsbedingungen wird eine Nebenbedingung hinzugefügt, die die Form der auszuführenden Korrektoriterationen kennzeichnet. Das so erweiterte Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \lambda) \\ f(\mathbf{U}, \lambda) \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.88)$$

Die konsistente Linearisierung von Gl. 3.88 an einem Gleichgewichtspunkt  $\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\lambda}$  führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{P} \\ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} & \frac{\partial f}{\partial \lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \lambda) \\ f(\mathbf{U}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (3.89)$$

$\mathbf{K}$  stellt dabei die tangentielle Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{P}$  den Lastvektor dar,  $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}}$  stellt die partielle Ableitung der Nebenbedingung nach den Verschiebungen (d.h. eine Matrix der Dimension 1\*Anzahl der Freiheitsgrade) dar. Prinzipiell können für die Gleichgewichtsiterationen sowohl das Standard Newton Raphson Verfahren als auch das Modifizierte Newton Raphson Verfahren angewendet werden. Während beim Standard Verfahren die Steifigkeitsmatrix in jedem Iterationsschritt neu aufgebaut und faktorisiert werden muß, wird beim modifizierte Verfahren lediglich eine Faktorisierung benötigt. Da beide Verfahren Vor- und Nachteile haben [58], ist eine diesbezügliche Entscheidung problemorientiert zu treffen.

Um die Symmetrieeigenschaften der Steifigkeitsmatrix auszunutzen, erfolgt die Lösung des nicht mehr symmetrischen Gleichungssystems (Gl. 3.89) mit Hilfe der Partitionierungsmethode [76]. Im Iterationsschritt  $i$  setzt sich das Verschiebungsinkrement aus zwei Anteilen zusammen.

$$\Delta \mathbf{U}_i = \Delta \mathbf{U}_{Gi} + \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{U}_{Pi} \quad (3.90)$$

Die beiden Teillösungen lauten:

$$\Delta \mathbf{U}_{Gi} = -\mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{G}_i \quad (3.91)$$

$$\Delta \mathbf{U}_{Pi} = \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{P} \quad (3.92)$$

Das unbekannte Lastinkrement erhält man dann aus den linearisierten Nebenbe-

dingung (Gl. 3.89).

$$\Delta\lambda_i = - \frac{f_i + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{U}}^T \Delta \mathbf{U}_{Gi}}{\frac{\partial f_i}{\partial \lambda} + \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{U}}^T \Delta \mathbf{U}_{Pi}} \quad (3.93)$$

Nachdem die Verschiebungsinkremente mit Gl. 3.90 bestimmt sind, können die Zustandsvariablen korrigiert werden:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_i \quad (3.94)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta \lambda_i \quad (3.95)$$

Diese Iteration wird solange wiederholt, bis eine Toleranzgrenze für die Gleichgewichtsbedingung erfüllt ist. Als Maß eignen sich z.B.:

$$\sqrt{\mathbf{G}^T \mathbf{G}} < TOL \quad (3.96)$$

Die Nebenbedingung beschreibt die Art der Iteration auf den neuen Gleichgewichtszustand. Für deren Formulierung gibt es unterschiedliche Verfahren die z.B. in [64, 76] aufgeführt sind. Die bekanntesten Verfahren sind die Laststeuerung, die Iteration auf einer “Kugelfläche” sowie die Iteration auf einer Tangentenebene. Im Rahmen dieser Arbeit sind die ersten beiden Verfahren angewendet worden.

### Laststeuerung

Innerhalb eines Inkrements bleibt die Belastung konstant, s. Abb. 3.4, die Nebenbedingung lautet dann [76]:

$$f = \lambda - c = 0 \quad \text{mit} \quad c = \text{const.} \quad (3.97)$$

Die partiellen Ableitungen der Nebenbedingung sind dann:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \quad (3.98)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 1 \quad (3.99)$$

Somit stellt Gl. 3.90 die Grundgleichung des Newtonverfahrens dar.

$$\Delta \mathbf{U}_i = \mathbf{K}_i^{-1} (c\mathbf{P} - \mathbf{R}(\mathbf{U})) \quad (3.100)$$

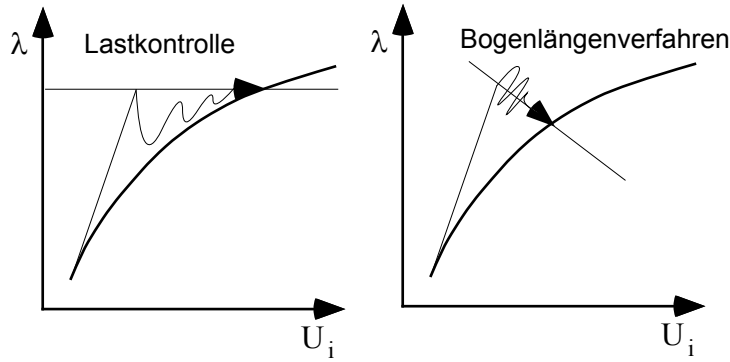


Abbildung 3.4: Iterationsverlauf für unterschiedliche Nebenbedingungen

### Iteration auf einer “Kugelfläche”

Liegt, wie in Abb. 3.2 dargestellt, kein eindeutiger Zusammenhang zwischen Last und Verschiebung vor, werden Nebenbedingungen benötigt, mit denen die Annäherung an die Gleichgewichtslösung nicht allein durch Verschiebungsgrößen, sondern auch durch eine Änderung der Belastungsgrößen erreicht wird. Eine solche, häufig verwendete Nebenbedingung basiert auf folgender Gleichung [59]:

$$f(\mathbf{U}, \lambda) = \sqrt{(\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}})^T (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) + \Psi^2 (\lambda - \tilde{\lambda})^2} - s \quad (3.101)$$

Der Faktor  $\Psi$  wird benötigt, da in Gl. 3.101 Größen unterschiedlicher Dimension enthalten sind.  $\Psi = 0$  entspricht einem zylindrischen Bogenlängenverfahren. Durch sehr große Werte ( $\Psi \rightarrow \infty$ ) geht das Verfahren wiederum in Richtung Lastkontrolle. Wie in [59] vorgeschlagen, wird der Wert des Parameters mit der Zahl der Systemfreiheitsgrade und der Norm des Prädiktorschritts festgelegt:

$$\Psi = \frac{\|\mathbf{U}_{pr}\|}{n} \quad (3.102)$$

Die partiellen Ableitungen der Nebenbedingungen, die für Gl. 3.89 bzw. Gl. 3.93 benötigt werden, lauten dann:

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{f+s} (\mathbf{U} - \tilde{\mathbf{U}}) \quad (3.103)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{\Psi^2}{f+s} (\lambda - \tilde{\lambda}) \quad (3.104)$$



## 3.7 Bestimmung singularer Punkte

Eine Diskussion bezüglich der Bestimmung singularer Punkte findet sich in [15, 58, 59, 76, 78, 79]. Im wesentlichen kann zwischen zwei Verfahren unterschieden werden. Mit einer Reihenentwicklung der Steifigkeitsmatrix kann der niedrigste kritische Punkt über ein Eigenwertproblem bestimmt werden. Diese, auch als Indifferenzenverfahren bezeichnete Vorgehensweise hat sich vor allem für Probleme mit näherungsweise linearem Vorbeulverhalten bewährt. Für ein nichtlineares Vorbeulverhalten empfiehlt sich eine Verfolgung des Lösungspfad, während dessen das Stabilitätsverhalten der Struktur begleitend untersucht wird. Zur Bestimmung des singularen Punktes kann dann im wesentlichen wiederum zwischen zwei Methoden unterschieden werden. Die Lage des kritischen Punktes kann aus den ermittelten Gleichgewichtspunkten interpoliert werden. Um die Genauigkeit zu steigern, bedarf es hierbei im Rahmen der Pfadverfolgung einer Reduzierung der Schrittweite in der Nähe der Singularität. Daneben können direkte Methoden angewendet, um singuläre Punkte möglichst genau zu bestimmen.

### 3.7.1 Das Indifferenzenverfahren

Das Indifferenzenverfahren [15, 58] basiert auf dem Standardeigenwertproblem für die tangentielle Steifigkeitsmatrix. Für Nulleigenwerte verbleibt die Singularitätsbedingung  $\mathbf{K}\Phi = \mathbf{0}$ . Die Steifigkeitsmatrix wird in eine asymptotische Reihe um einen Grundzustand bezüglich des Lastparameters entwickelt:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 + \lambda\mathbf{K}_1 + \lambda^2\mathbf{K}_2 + \dots\lambda^n\mathbf{K}_n \quad (3.105)$$

Das Eigenwertproblem lautet dann:

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda\mathbf{K}_1 + \lambda^2\mathbf{K}_2 + \dots\lambda^n\mathbf{K}_n) \Phi = \mathbf{0} \quad (3.106)$$

Der niedrigste Eigenwert führt zur kritischen Last [15, 58]. Um die Matrizen  $\mathbf{K}_i$  zu erhalten wird  $\mathbf{K}_0$  bestimmt und zu  $n$  Laststufen des Vorbeulpfades Gleichgewichtszustände gesucht. An diesen Punkten des Last-Verschiebungs-Verlaufes werden die tangentiellen Steifigkeitsmatrizen  $\mathbf{K}_{T_i}$  aufgebaut. Die  $\mathbf{K}_i$  berechnen sich dann aus folgender Beziehung:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{T1} - \mathbf{K}_0 \\ \dots \\ \mathbf{K}_{Tn} - \mathbf{K}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 \\ \dots \\ \mathbf{K}_n \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Für Vorbeulzustände die linear von den Verformungen abhängen, wird die Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen. In diesem Fall führt das Indifferenzenverfahren auf exakte Ergebnisse für die kritische Last. Um  $\mathbf{K}_1$  zu bestimmen wird zunächst das System mit Lastfaktor  $\lambda_1$  gelöst. Die tangentielle Steifigkeitsmatrix wird am ermittelten Verschiebungszustand erneut berechnet. Der verformungsabhängige Anteil der Steifigkeitsmatrix bestimmt sich dann aus der Differenz der neuen und der alten Steifigkeitsmatrix. Im Gegensatz zum Term  $\mathbf{K}_0$  ist der Term  $\mathbf{K}_1$  nicht notwendigerweise positiv definit. Eine Normierung der Eigenvektoren auf  $\mathbf{K}_1$  ist damit nicht möglich. Zur Lösung des Eigenwertproblems müssen gesonderte Maßnahmen getroffen werden, auf die im Anhang B eingegangen wird.

Werden höhere Terme berücksichtigt bereitet die Lösung des Eigenwertproblems (Gl. 3.106) Schwierigkeiten. Für näherungsweise lineares Vorbeulverhalten, wie z.B. bei Kreiszylindern unter axialer Belastung, wird folgende Vorgehensweise vorgeschlagen. Die Lösung des linearen Eigenwertproblems führt auf  $k$  Eigenvektoren  $\Phi_{lin}$  mit denen eine Projektion der tangentiellen Matrizen in den aufgespannten Unterraum durchgeführt werden kann:

$$\mathbf{K}_{T_i}^* = \Phi_{lin}^T \mathbf{K}_{T_i} \Phi_{lin} \quad (3.108)$$

Mit den projizierten Matrizen werden die  $\mathbf{K}_i$  nach Gl. 3.107 bestimmt. Das Eigenwertproblem (Gl. 3.106) ist dann von Dimension  $k$  und kann iterativ gelöst werden. Bereits mit Berücksichtigung der Terme 2. Ordnung läßt sich z.B. für axial belastete Kreiszylinder die kritische Last sehr genau bestimmen. Die Berücksichtigung höherer Terme bedarf einer entsprechend genauen Bestimmung der Gleichgewichtspunkte. In Anhang D ist ein Beispiel zum Indifferenzenverfahren aufgeführt.

### 3.7.2 Kritische Punkte mit Hilfe von Pfadverfolgung und begleitenden Maßnahmen

Zusammen mit begleitenden Maßnahmen werden Pfadverfolgungsalgorithmen, vgl. Kap. 3.6, häufig eingesetzt, um singuläre Punkte für Systeme mit nichtlinearem Vorbeulzustand zu bestimmen. Als begleitende Maßnahme kann z.B. der niedrigste Eigenwert der Struktur verfolgt werden. Das Auftreten eines negativen Eigenwerts kennzeichnet dann eine Singularität, die zwischen dem letzten und dem gegenwärtigen Gleichgewichtszustand eingetreten ist. Für eine genauere Lokalisierung des kritischen Punktes erweist sich eine automatisierte Schrittweitensteuerung für den Prädiktorschritt des Pfadverfolgungsalgorithmus als zweckmäßig.

Die Schrittweite basiert dabei im wesentlichen auf einem Verhältnis einer Systemgröße im aktuellen und im unbelasteten Zustand. Der Faktor  $c$  für den Prädiktorschritt (Gl. 3.86) setzt sich aus einem Faktor, der vom Verfahren abhängt, und einer Konstanten  $c_0$  zusammen. In [15, 59] werden die Determinante, die niedrigste Eigenfrequenz bzw. der niedrigste Eigenwert als Bezugsgrößen vorgeschlagen. Ebenfalls vorgeschlagen wird, die Schrittweite über das Verhältnis einer vorgegeben Anzahl von Gleichgewicht Iterationsschritten zur benötigten Anzahl zu steuern. Weitere Verfahren sind in [59] aufgeführt. Ein Bisektionsverfahren ist ebenfalls möglich. Tritt im Verlauf der Pfadverfolgung ein negativer Eigenwert der Steifigkeitsmatrix bzw. Konvergenzprobleme auf, so wird die zuletzt verwendete Bogenlänge halbiert und die Berechnung vom letzten Gleichgewichtspunkt aus erneut durchgeführt. Die Berechnung wird abgebrochen wenn der Betrag des kleinsten Eigenwerts eine vorgegebene Schranke unterschreitet. Das Verfahren erlaubt sowohl Durchschlags- als auch Verzweigungspunkte relativ genau zu bestimmen und erweist sich auch bei Mehrfachsingularitäten als stabil.

Insbesondere in Kombination mit Subspace-Iterations Techniken stellt die begleitende Berechnung des kleinsten Eigenwerts einen geringen Rechenaufwand dar, da - einen Gleichungslöser, der eine faktorisierte Steifigkeitsmatrix verwendet, vorausgesetzt - diese nach der Newton Iteration bereits vorliegt.

### 3.7.3 Direkte Berechnung singulärer Punkte

Mit erweiterten Gleichungssystemen können singuläre Punkte auf eine direkte Weise bestimmt werden. Die zusätzlichen Nebenbedingungen beschreiben die Singularität. Eine konsistente Linearisierung des so erweiterten Gleichungssystems führt dann theoretisch auf ein quadratisches Konvergenzverhalten für die Bestimmung des kritischen Punktes. Auf Grund der schlechten Kondition der Steifigkeitsmatrix in der Nähe des singulären Punktes wird das quadratische Konvergenzverhalten jedoch gestört. Zusammen mit der Methode der Finiten Elemente wurde ein Verfahren in [79] vorgestellt und ist ferner u.a. in [59, 76, 78, 70] beschrieben. Das Verfahren gelangt in Verbindung mit der Pfadverfolgung und begleitenden Eigenwertanalyse zum Einsatz. Die direkte Berechnung eines singulären Punktes wird gestartet, wenn im Verlauf der Pfadverfolgung ein Eigenwert mit negativen Vorzeichen auftritt. Zur Formulierung der Nebenbedingungen

gibt es unterschiedliche Möglichkeiten, z.B [76, 59]:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \lambda) \\ \mathbf{K}(\mathbf{U}) \Phi_1 \\ \Phi_1^T \Phi_1 - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (3.109)$$

Der Ausdruck  $\mathbf{K}(\mathbf{U}) \Phi_1$  beschreibt die Singularität. Die letzte Zeile des obigen Gleichungssystems wird benötigt, um die Norm des Eigenvektors festzulegen und damit die triviale Lösung  $\|\Phi_1\| = 0$  auszuschließen. Die konsistente Linearisierung von Gl. 3.109 führt unter der Annahme von verformungsunabhängigen Belastungen auf folgendes erweitertes Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} & -\mathbf{P} \\ \frac{\partial(\mathbf{K}\Phi_1)}{\partial \mathbf{U}} & \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\Phi_1^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{U} \\ \Delta \Phi_1 \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{U}, \lambda) \\ \mathbf{K}(\mathbf{U}) \Phi_1 \\ \Phi_1^T \Phi_1 - 1 \end{bmatrix} \quad (3.110)$$

Ähnlich wie in Kap. 3.6 erfolgt die Lösung mit Hilfe der Partitionierungsmethode.

$$\Delta \mathbf{U}_P = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} \quad (3.111)$$

$$\Delta \mathbf{U}_G = -\mathbf{K}^{-1} \mathbf{G} \quad (3.112)$$

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{U}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{U}_G \quad (3.113)$$

$$\Delta \Phi_P = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial(\mathbf{K}\Phi_1)}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}_P \quad (3.114)$$

$$\Delta \Phi_G = \mathbf{K}^{-1} \frac{\partial(\mathbf{K}\Phi_1)}{\partial \mathbf{U}} \Delta \mathbf{U}_G \quad (3.115)$$

$$\Delta \lambda = \frac{1 + \Phi_1^T \Phi_1 - 2\Phi_1^T \Delta \Phi_G}{2\Phi_1^T \Delta \Phi_P} \quad (3.116)$$

In Gl. 3.114 und Gl. 3.115 tritt die Ableitung  $\frac{\partial(\mathbf{K}\Phi_1)}{\partial \mathbf{U}}$  auf, auf die in Anhang A eingegangen wird. Als neue Werte resultieren nach dem Iterationschritt:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta \mathbf{U}_P \Delta \lambda + \Delta \mathbf{U}_G \quad (3.117)$$

$$\Phi_{i+1} = \Phi_i + \Delta \Phi_P \Delta \lambda + \Delta \Phi_G \quad (3.118)$$

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta \lambda \quad (3.119)$$

Für die Iteration wird das Standard-Newton Verfahren angewendet. Die Iteration wird solange wiederholt, bis z.B. das Verhältnis des kleinsten aktuellen Eigenwerts zum kleinsten Eigenwert des unbelasteten Systems eine vorgegebene

Toleranzgrenze unterschreitet. Das Verfahren konvergiert, wenn der Startpunkt bereits ausreichend nahe am singulären Punkt liegt. Mögliche Startvektoren sind der Verschiebungszustand, der Einsvektor (1 auf allen Komponenten) und der Eigenvektor zum kleinsten Eigenwert des letzten Gleichgewichtszustandes mit noch positivem Eigenwert. Die besten Ergebnisse wurden mit der letzten Variante erzielt. In unmittelbarer Nähe des kritischen Punktes treten durch die dann nahezu singuläre Steifigkeitsmatrix Konvergenzschwierigkeiten auf. Die Inkremente  $\Delta \mathbf{U}, \Delta \Phi_1, \Delta \lambda$  werden ungenau. In vielen Fällen tritt nach einem Wegspringen der Zwischenlösung vom kritischen Punkt Divergenz des Verfahrens ein. Wenn das Verfahren nicht vorher abgebrochen wird, müssen Vorkehrungen beim Umgang mit der nahezu singulären Steifigkeitsmatrix getroffen werden. In [59, 76] werden hierzu verschiedene Stabilisierungsmaßnahmen diskutiert. Meist ist die Genauigkeit bei einem Abbruch vor den Divergenzschwierigkeiten jedoch bereits ausreichend, um das Nachbeul- bzw. das Imperfektionsverhalten der Struktur mit den asymptotischen Gesetzen zu untersuchen.

# Kapitel 4

## Software und numerische Umsetzung

### 4.1 Slang - the Structural Language

Mit kommerziell verfügbaren Software Paketen können bereits viele Probleme aus der Strukturmechanik gelöst werden. Jedoch ist die Anwendbarkeit dieser Programme insbesondere für stochastische Probleme sehr begrenzt. Das Software Paket Slang (Structural **L**anguage) [19, 20] beinhaltet sowohl Finite Element Methoden als auch probabilistische Verfahren zur Modellierung von stochastischen Belastungen und physikalischen sowie geometrischen Unsicherheiten. Da das Programm modular in einer Meta-Sprache konzipiert und somit nicht an vordefinierte Kommandosequenzen gebunden ist, kann eine Vielzahl von Ingenieurproblemen bearbeitet werden.

Slang stellt im wesentlichen einen Kommando-Interpreter dar, der auf einem Satz von mehr oder weniger komplexen Kommandos aufbaut. Beispiele für derartige Kommandos sind etwa der Aufbau von Elementmatrizen, die Lösung eines Gleichungssystems, die Visualisierung einer verformten Struktur etc. Basierend auf dieser Eingabesprache werden auf Anwenderebene Berechnungsläufe formuliert, die sequentiell im Rechner abgearbeitet werden.

Slang wird über eine graphische Benutzeroberfläche bedient. Der Berechnungsablauf kann zu jedem Zeitpunkt angehalten werden, um den Wert bzw. Zustand von Variablen und Objekten zu überprüfen. Auf den Berechnungsablauf kann interaktiv eingegriffen werden. Das Programm unterstützt ein *error tracing*, so daß

Bedienungsfehler schnell lokalisiert werden können. Eine Kommunikation zwischen den Kommandos geschieht zum einem mit Objekten, z.B. Skalare, Vektoren, Matrizen, die auf Anwenderebene verfügbar sind. Daneben ist ein Datenaustausch der Kommandos über interne, dem Anwender nicht unmittelbar zugängliche Datenstrukturen des Programms möglich. Innerhalb des Programms findet keine Kommunikation der Kommandos über Dateien statt, Lese/Schreibvorgänge entfallen somit. Die Verwaltung des Arbeitsspeichers findet während der Kommandoausführung auf dynamische Weise statt, die Speicherbegrenzung des Programms ist hardwareorientiert. Die offene Struktur des Programms ermöglicht es, neue Module an den bestehenden Code anzufügen.

#### **4.1.1 FE Daten-Verwaltung**

Aufbauend auf dem Kommandointerpreter sind Module zur FE-Berechnung integriert. Ähnlich der Kommandostruktur ist die Verwaltung der Routinen für die vorhandenen Elementtypen objektorientiert organisiert. Entsprechend der Programmanforderung verzweigt die Verwaltungsroutine zu Routinen, die den Elementtyp definiert, Elementrückstellkräfte bzw. die tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix, etc. berechnet und die Berechnungsergebnisse in interne Datenstrukturen einträgt. Elementtypen können prinzipiell unterschiedliche Materialgesetze ansprechen. Diese werden wiederum ähnlich den Elementtypen über interne Datenstrukturen verwaltet. Neue Elementtypen bzw. neue Materialgesetze können dementsprechend in das System integriert werden.

Nach der Definition einer FE-Struktur sowie dem Aufbau der Elementsteifigkeitsmatrizen werden über weitere Kommandos Systemmatrizen aufgestellt. An diesem Punkt stehen dem Benutzer unterschiedliche Speicherformen zur Verfügung. Neben der Speicherung in Form einer (unteren) Dreiecksmatrix können kompakte Matrizen, für die lediglich die von Null verschiedenen Einträge gespeichert werden, gewählt werden. Nachdem die Systemmatrizen in der FEM im allgemeinen schwach besetzt sind, hat diese Vorgehensweise bezüglich des Speicherbedarfs erhebliche Vorteile.

#### **4.1.2 Lineare Algebra**

Lineare Algebra Routinen sind in SLang unabhängig von den FE- Programmteilen organisiert. Eine Kommunikation zwischen den Programmteilen erfolgt über

Kommandos mit denen Knoteninformation wie etwa Koordinaten, Verschiebungen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen von den programminternen Tabellen auf dem Anwender zugängliche Objekte bzw. umgekehrt kopiert werden. Das Finite Elemente Verfahren wird damit im wesentlichen als Werkzeug zur Aufstellung von (Differential-) Gleichungen verstanden. Die zur Verfügung stehenden Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme sind von der gewählten Speicherform abhängig.

Die Lösung der linearen Algebra Probleme baut für nichtkompakte Matrizen auf der *public domain* verfügbaren LAPACK Bibliothek [2] auf. Für eine kompakte Speicherung stehen dem Anwender ein zweistufiger Gleichungslöser (Faktorisieren und Auflösen) mit Skyline Speichertechnik [57] sowie ein Gleichungslöser auf Basis des konjugierten Gradienten Verfahrens [18] zur Verfügung. Dieser hat insbesondere in Bezug auf den Speicherbedarf Vorteile, mitunter ergeben sich für gut konditionierte Probleme starke Rechenzeitvorteile. Dennoch wird eine Entscheidung bezüglich der Wahl des Gleichungslösers stets problemorientiert ausfallen. Eigenwertprobleme werden für kompakte Matrizen über die Sub-Space Iterationstechnik gelöst [9]. Nachdem die Eigenwertlösung eine zentrale Bedeutung im Rahmen der Berechnungsabläufe zukommt, wird auf diese Problematik in Anhang B gesondert eingegangen. Die Eigenwertlöser für kompakte Matrizen können beide Gleichungslöser ansprechen.

### 4.1.3 Probabilistische Modellierung

Eine wesentliche Zielsetzung des Programms ist, den Einfluß von Zufälligkeiten in der Belastung, der Geometrie und den Werkstoffkennwerten auf die Strukturantwort zu erfassen. Die Zufälligkeiten werden dabei mit probabilistischen Methoden modelliert. Dazu werden Zufallsvariablen verwaltet, die über Typ, Mittelwert, Standardabweichung und eine Korrelationsstruktur festgelegt werden. Damit können auf Anwenderebene bereits zufällige Belastungen, zufällige Geometriestellungen und stochastische Prozesse modelliert werden. Um räumlich streuende Größen über Zufallsfelder, vgl. Kap. 2.2.2, abzubilden, ist zusätzlich noch eine Korrelationsfunktion und eine Diskretisierung des Feldes erforderlich. Je nach Anwendung können die Zufallsfelder im Elementschwerpunkt, in den Integrationspunkten eines Elements sowie in den Knotenpunkten der FE Struktur diskretisiert sein. Dies erlaubt, räumlich streuende Werkstoffkennwerte und auch geometrische Imperfektionen für die Strukturanalyse zu berücksichtigen. Ferner können vom Anwender deterministische Bedingungen für das Zufallsfeld gesetzt werden.



Diese werden im Korrelationsmodell berücksichtigt, vgl. Kap. 2.2.3. Um Daten auszuwerten stehen in **SIANG** Spektralanalyse, Fouriertransformation, statistische Testverfahren, Ausreißerbehandlung etc. zur Verfügung.

## 4.2 Grundlagen

Der folgende Abschnitt geht auf die verwendete Finite-Element Formulierung ein. Eine Zielsetzung ist die Berechnung von Stabilitätsproblemen [58, 70, 76]. Dazu wird eine “Total-LAGRANGE’sche” Formulierung verwendet, die große Dehnungen bei kleinen Rotationen berücksichtigt [23]. Die Gleichungen werden zunächst für das Kontinuum abgeleitet, im weiteren Verlauf wird die Anwendung auf ein Platten-Membran Element diskutiert. Über gleiche Indizes soll summiert werden.

Gemäß dem Prinzip der Virtuellen Arbeit [36] liegt ein Gleichgewichtszustand vor, wenn nach einer virtuellen Verschiebung  $\delta \mathbf{U}$ , die mit den kinematischen Randbedingungen verträglich ist, die Summe aus innerer und äußerer virtueller Arbeit verschwindet:

$$\delta W_i + \delta W_a = 0 \quad (4.1)$$

Bei einem Diskretisierungsprozeß wird das betrachtete Kontinuum in  $n$  finite Elemente unterteilt, die in Knotenpunkten miteinander verbunden sind. Die virtuelle Arbeit des betrachteten Kontinuums wird dann als Summe der inneren und äußeren virtuellen Arbeiten der Finiten Elemente approximiert.

$$\sum_{e=1}^n \delta W_i^e + \delta W_a^e = 0 \quad (4.2)$$

### Äußere virtuelle Arbeit

Die äußeren Lasten setzen sich aus Elementvolumenlasten  $\mathbf{v}^e$ , Elementoberflächenlasten  $\mathbf{s}^e$  sowie diskreten Einzellasten  $\mathbf{F}_i^e$  an den Knoten zusammen. Für den Ausdruck der äußeren Lasten entlang der virtuellen Verschiebungen  $\mathbf{u}^e$  in den finiten Elementen gilt dann,

$$\delta W_a = \lambda \sum_{e=1}^n \int_{V^e} v_i^e \delta u_i^e dV^e + \int_{S^e} s_i^e \delta u_i^e dS^e + \sum_{k=1}^m F_{ki}^e \delta u_i^e, \quad (4.3)$$

wobei der Index  $i$  über  $x, y, z$  läuft und  $\lambda$  einen Lastparameter darstellt. Die Finite Elemente Methode stellt die Verschiebungsfelder  $u_i(x, y, z)$  als eine Linearkombination von Interpolationsfunktionen  $\mathbf{H}^e$  und diskreten Knotenverschiebungen  $\mathbf{U}^e$  dar.

$$u_i^e(x, y, z) = H_{il}^e(x, y, z) U_l^e \quad (4.4)$$

Der Index  $l$  kennzeichnet die Freiheitsgrade der Knoten des Finiten Elements. Die Variation von Gl 4.4 lautet:

$$\delta u_i^e(x, y, z) = H_{il}^e(x, y, z) \delta U_l^e \quad (4.5)$$

Mit Gl. 4.4 ergibt sich der Ausdruck für die virtuelle äußere Arbeit im Kontinuum bei beliebigen virtuellen Knotenverschiebungen  $\delta \mathbf{U}^e$ , die definierte Randbedingungen erfüllen:

$$\delta W_a = \lambda \sum_{e=1}^n \left( \int_{V^e} v_i^e H_{il}^e dV^e + \int_{S^e} s_i^e H_{il}^e dS^e + \sum_{k=1}^m F_{kl}^e \right) \delta U_l^e \quad (4.6)$$

Der Operator  $\dot{\cup}_{e=1}^n$  kennzeichnet die Vereinigung aller Elemente zu einem Gesamtsystem. Mit  $\mathbf{U} = \dot{\cup}_{e=1}^n \mathbf{U}^e$  folgt:

$$\delta W_a = \lambda \dot{\cup}_{e=1}^n \left( \int_{V^e} v_i^e H_{il}^e dV^e + \int_{S^e} s_i^e H_{il}^e dS^e + \sum_{k=1}^m F_{kl}^e \right) \delta U_l \quad (4.7)$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{P} = \dot{\cup}_{e=1}^n \left( \int_{V^e} v_i^e H_{il}^e dV^e + \int_{S^e} s_i^e H_{il}^e dS^e + \sum_{k=1}^m F_{kl}^e \right), \quad (4.8)$$

wird als Lastvektor bezeichnet.

### Innere virtuelle Arbeit

Für die im Kontinuum verrichtete innere virtuelle Arbeit der Spannungen  $\sigma$  entlang der virtuellen Verzerrungen  $\delta \varepsilon$  gilt (z.B. [36]).

$$-\delta W_i = \int_V \sigma_{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV \quad (4.9)$$

Bei einem Diskretisierungsprozeß wird die innere virtuelle Arbeit des Kontinuums als Summe der inneren virtuellen Arbeiten der Finiten Elemente approximiert.

$$-\delta W_i = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \sigma_{ik}^e \delta \varepsilon_{ik}^e dV^e \quad (4.10)$$

$\delta \varepsilon^e$  bezeichnet die Variation des GREEN'schen Dehnungstensors,  $\sigma^e$  den 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungstensor. Der GREEN'sche Verzerrungstensor  $\varepsilon$  [36] ist folgendermaßen mit den Deformationsgradienten verknüpft.

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} (A_{ik} + A_{ki} + A_{ji} A_{jk}), \quad (4.11)$$

wobei für die Deformationsgradienten  $A_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$  gilt. Mit dem Finite Element Ansatz (Gl. 4.4) ergibt sich im Element:

$$A_{ik}^e = \frac{\partial H_{il}^e}{\partial x_k} U_l^e = \tilde{B}_{ikl}^e U_l^e \quad (4.12)$$

Hierbei wurde der Tensor  $\tilde{\mathbf{B}}^e$  eingeführt, der die Gradienten der Interpolationsfunktionen enthält. Somit lassen sich, die GREEN'schen Dehnungen im Element durch die Deformationsgradienten ausdrücken:

$$\varepsilon_{ik}^e = \frac{1}{2} (\tilde{B}_{ikl}^e + \tilde{B}_{kil}^e) U_l^e + \frac{1}{2} \tilde{B}_{iml}^e \tilde{B}_{kmn}^e U_l^e U_n^e \quad (4.13)$$

Die Variation der Dehnungen, die zur Formulierung der virtuellen Arbeit zufolge der inneren Lasten benötigt werden, Gl. 4.10, lassen sich aus Gl. 4.13 bestimmen:

$$\delta \varepsilon_{ik}^e = \left( \frac{1}{2} (\tilde{B}_{ikl}^e + \tilde{B}_{kil}^e) + \frac{1}{2} (\tilde{B}_{imn}^e \tilde{B}_{kml}^e + \tilde{B}_{iml}^e \tilde{B}_{kmn}^e) U_n^e \right) \delta U_l^e \quad (4.14)$$

bzw.

$$\delta \varepsilon_{ik}^e = \tilde{C}_{ikl}^e \delta U_l^e, \quad (4.15)$$

wobei sich der Tensor  $\tilde{\mathbf{C}}^e$  aus einem von den Knotenverformungen  $\mathbf{U}^e$  unabhängigen sowie einem linear abhängigen Ausdruck der Element Verzerrungs-Verschiebungsrelationen  $\tilde{\mathbf{B}}^e$  zusammensetzt. Die innere virtuelle Arbeit lautet:

$$-\delta W_i = \sum_{e=1}^n \int_{V^e} \sigma_{ik}^e \tilde{C}_{ikl}^e dV^e \delta U_l^e \quad (4.16)$$

Mit der Vorschrift zur Vereinigung aller Element zum Gesamtsystem  $\delta \mathbf{U} = \dot{\cup}_{e=1}^n \delta \mathbf{U}^e$  ergibt dies:

$$-\delta W_i = \dot{\cup}_{e=1}^n \int_{V^e} \sigma_{ik}^e \tilde{C}_{ikl}^e dV^e \delta U_l \quad (4.17)$$

Der Ausdruck  $\int_{V^e} \sigma_{ik}^e \tilde{C}_{ikl}^e dV^e$  stellt dabei die Elementrückstellkräfte  $\mathbf{R}^e$  dar.

$$-\delta W_i = \dot{\cup}_{e=1}^n R_l^e \delta U_l \quad (4.18)$$

Mit der Vorschrift  $\mathbf{R} = \dot{\cup}_{e=1}^n \mathbf{R}^e$  und beliebigen virtuellen Verückungen  $\delta \mathbf{U}$ , die die kinematischen Zwangsbedingungen erfüllen, ergeben sich dann die in Kap. 3.1 angegebenen Gleichgewichtsbedingungen für das Kontinuum. Das Residuum  $\mathbf{G}$  verschwindet für den Gleichgewichtsfall. Die Linearisierung der Gleichgewichtsbedingungen um eine Referenzlösung  $\mathbf{U}_0$  führt auf ein Gleichungssystem für die Knotenverschiebungen  $\mathbf{U}$ :

$$\dot{\cup}_{e=1}^n \left. \frac{\partial \mathbf{R}^e(\mathbf{U}^e)}{\partial \mathbf{U}^e} \right|_{\mathbf{U}_0^e} [\mathbf{U} - \mathbf{U}_0] = \lambda \mathbf{P} \quad (4.19)$$

Der Ausdruck

$$\mathbf{K}^e = \left. \frac{\partial \mathbf{R}^e(\mathbf{U}^e)}{\partial \mathbf{U}^e} \right|_{\mathbf{U}_0^e} \quad (4.20)$$

stellt dabei die tangentielle Steifigkeitsmatrix eines finiten Elements dar. Deren Komponenten ergeben sich nach Differentiation:

$$K_{rs}^e = \int_{V^e} \frac{\partial \sigma_{ik}^e}{\partial U_s^e} \tilde{C}_{ikl}^e + \sigma_{ik}^e \frac{\partial \tilde{C}_{ikr}^e}{\partial U_s^e} dV^e \Big|_{\mathbf{U}_0^e} \quad (4.21)$$

Aus Gl. 4.13 folgt für  $\frac{\partial C_{ikr}^e}{\partial U_s^e}$ :

$$\frac{\partial \tilde{C}_{ikr}^e}{\partial U_s^e} = \tilde{B}_{imn}^e \tilde{B}_{kmr}^e + \tilde{B}_{imr}^e \tilde{B}_{kmn}^e \quad (4.22)$$

Mit  $\frac{\partial \sigma_{ik}^e}{\partial U_s^e} = \frac{\partial \sigma_{ik}^e}{\partial \varepsilon_{lm}^e} \frac{\varepsilon_{lm}^e}{\partial U_s^e}$  und dem vierstufigen tangentiellen Elastizitätstensor  $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial \varepsilon_{lm}} = E_{iklm}$  [36] und  $\frac{\varepsilon_{lm}^e}{\partial U_s^e} = \tilde{C}_{lms}^e$  folgt dann für die Komponenten der tangentiellen Elementsteifigkeitsmatrix:

$$K_{rs}^e = \int_{V^e} \tilde{C}_{lms}^e E_{iklm} \tilde{C}_{ikr}^e + \sigma_{ik}^e (\tilde{B}_{imn}^e \tilde{B}_{kmr}^e + \tilde{B}_{imr}^e \tilde{B}_{kmn}^e) dV^e \Big|_{\mathbf{U}_0} \quad (4.23)$$

Der erste Term beinhaltet die Anfangsdeformationen, der zweite Term stellt die sogenannte geometrische Matrix dar.

#### 4.2.1 Platten-Membran Element SHELL3N

Für Slang sind neben Ansätzen für geometrisch nichtlineare Balken und Volumenelementen auch solche für Platten-Membran Elemente mit 3 bzw. 6 Knoten entwickelt worden. Auf das dreiknotige Element soll hier eingegangen werden. Die Knotenfreiwerte sind die Verschiebungen in  $x^e$  und  $y^e$  Richtung in der Schalenenebene für das Membranproblem sowie die Verschiebung in  $z^e$  Richtung und die Rotationen um die  $x^e$  sowie  $y^e$  Achse für das Plattenbiegeproblem. Für das Element wird ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt, d.h.  $\sigma_{zz} = 0$ , ferner werden für hinreichend dünne Strukturen die Schubverzerrungen vernachlässigt, d.h.  $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ . Somit liefern in Gl. 4.10 lediglich die virtuellen Dehnungen  $\delta\epsilon_{xx}$ ,  $\delta\epsilon_{yy}$ , sowie  $\delta\gamma_{xy}$  einen Beitrag zur inneren virtuellen Arbeit.

##### Elementmatrizen

Mit der Anwendung der KIRCHHOFF-Theorie für den Biegeanteil werden die Verschiebungen eines Punktes im Element auf die Verformung der Mittelfläche zurückgeführt. Damit ergeben sich die folgenden kinematischen Beziehungen, die den Ausgangspunkt zur Ableitung der Elementsteifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}^e$  sowie der Elementrückstellkräfte  $\mathbf{R}^e$  bilden.

$$u = u_s - \frac{\partial w_s}{\partial x} z \quad (4.24)$$

$$v = v_s - \frac{\partial w_s}{\partial y} z \quad (4.25)$$

$$w = w_s \quad (4.26)$$

Die Größen  $u_s, v_s, w_s$  stellen die Verschiebungen der Elementmittelfläche in  $x^e, y^e$  und  $z^e$ -Richtung im Elementkoordinatensystem dar. Mit Gl. 4.24 bis Gl. 4.26 lauten die Deformationsgradienten:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_s}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} z & \frac{\partial u_s}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} z & -\frac{\partial w_s}{\partial x} \\ \frac{\partial v_s}{\partial x} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} z & \frac{\partial v_s}{\partial y} - \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} z & -\frac{\partial w_s}{\partial y} \\ \frac{\partial w_s}{\partial x} & \frac{\partial w_s}{\partial y} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Mit Gl. 4.11 ergeben sich die Dehnungskomponenten, in die wiederum die Formfunktionen eingesetzt werden. Auf die Formfunktionen wird in Kap. 4.2.1 nochmals näher eingegangen. An dieser Stelle erfolgt die Kopplung der Membran- sowie der Plattenbiegeanteile. Die Dehnungen setzen sich aus einem linear und einem quadratisch von den Verschiebungen abhängigen Term zusammen. Gl. 4.15 läßt sich für eine programmtechnische Umsetzung in Matrixschreibweise anordnen [23]:

$$\varepsilon_{xx}^e = \mathbf{b}_{xx}^e \mathbf{U}^e + \mathbf{U}^{eT} \mathbf{C}_{xx}^e \mathbf{U}^e \quad (4.28)$$

Für die Dehnungskomponenten  $\varepsilon_{yy}^e, \varepsilon_{xy}^e$  ergeben sich analoge Ausdrücke. Dabei setzen sich die Vektoren  $\mathbf{b}_{xx}, \mathbf{b}_{yy}, \mathbf{b}_{xy}$  bzw. die Matrizen  $\mathbf{C}_{xx}, \mathbf{C}_{yy}, \mathbf{C}_{xy}$  aus den Ableitungen der Formfunktionen für das Membran- und das Plattenbiegeproblem zusammen. Die Dehnungsinkremente (Gl. 4.14) lauten dann:

$$\delta \varepsilon_{xx}^e = \left[ \mathbf{b}_{xx}^e + \mathbf{U}^{eT} \left( \mathbf{C}_{xx}^e + \mathbf{C}_{xx}^{eT} \right) \right] \delta \mathbf{U}^e \quad (4.29)$$

Wiederum ergeben sich analoge Ausdrücke für  $\delta \varepsilon_{yy}^e$  und  $\delta \varepsilon_{xy}^e$ .

Mit  $\delta \varepsilon^T = [\delta \varepsilon_{xx}, \delta \varepsilon_{yy}, \delta \varepsilon_{xy}]$  lassen sich diese Beziehungen in Matrixform zusammenfassen, wobei die Zeilen der  $\mathbf{B}^e$  Matrix jeweils dem Klammerausdruck aus Gl. 4.29 sowie den analogen Ausdrücken für  $\delta \varepsilon_{yy}^e$  und  $\delta \varepsilon_{xy}^e$  entsprechen.

$$\delta \varepsilon^e = \mathbf{B}^e \delta \mathbf{U}^e \quad (4.30)$$

Für ST. VENANT-Material liegt ein linearer Zusammenhang zwischen den 2. PIOLA-KIRCHHOFF'schen Spannungen  $\sigma^T = [\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}]$  und den GREEN'schen Verzerrungen vor [36, 70, 76]. Für einen ebenen Spannungszustand hat das Werkstoffgesetz die einfache Form:

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$E$  stellt den Elastizitätsmodul,  $\nu$  die Poissonzahl dar. Für nichtlineare Materialgesetze wird z.B. auf [82] verwiesen. Damit ergeben sich die Elementrückstellkräfte zu:

$$\mathbf{R}^e = \int_{V^e} \sigma^e \mathbf{B}^e dV^e \quad (4.32)$$

Die geometrisch nichtlineare tangentielle Elementsteifigkeitsmatrix hat die folgende Form:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^e &= \int_{V^e} \mathbf{B}^{eT} \mathbf{D} \mathbf{B}^e dV^e \\ &+ \int_{V^e} \sigma_{xx}^e \left( \mathbf{C}_{xx}^e + \mathbf{C}_{xx}^{eT} \right) + \sigma_{yy}^e \left( \mathbf{C}_{yy}^e + \mathbf{C}_{yy}^{eT} \right) + \sigma_{xy}^e \left( \mathbf{C}_{xy}^e + \mathbf{C}_{xy}^{eT} \right) dV^e \end{aligned} \quad (4.33)$$

In Gl. 4.33 beinhaltet der erste Term wiederum die Anfangsdeformationen, die weiteren Terme werden als geometrische Matrix bezeichnet. Für eine programmtechnische Umsetzung müssen damit zunächst die **b**- Vektoren sowie die **C**- Matrizen aus den Ableitungen der Formfunktionen in den Integrationspunkten aufgestellt werden. Aus diesen bestimmen sich die Elementrückstellkräfte sowie die Elementsteifigkeitsmatrix.

### Ansatzfunktionen

Die Approximationsgüte sowie das Konvergenzverhalten eines Finiten Elements wird wesentlich von den Ansatzfunktionen beeinflusst. Die Verzerrungsfelder, die aus den Ansatzfunktionen eines Elements resultieren, müssen bereichsweise mit den realen kinematischen Verzerrungen übereinstimmen. Werden zuviel bzw. zuwenig Verzerrungsanteile durch die Ansatzfunktionen abgebildet, resultieren daraus Elemente mit einem zu steifen bzw. zu weichen Verhalten. Im Extremfall führt dies auf Phänomene wie Element *locking* bzw. *zero energy modes*.

Notwendige Anforderungen an die Konvergenz eines Finiten Elements sind, daß Starrkörperverschiebungen sowie konstante Dehnungszustände bzw. Krümmungszustände abgebildet werden können [9, 11]. Werden diese Bedingungen verletzt, kommt es zu einer Konvergenzverschlechterung. Insbesondere nehmen die Verschiebungs- bzw. Rotationsfelder für *locking* viel zu kleine Werte an. In der Literatur finden sich unterschiedliche Strategien zur Behandlung dieser unerwünschten Effekte. Die bekanntesten Methoden sind die reduzierte Integration, die *assumed natural strain* Methode, die *enhanced assumed strain* Methode [1, 70], als auch die ähnliche Ansätze anwendende MSKE (*moment-na shema konecnh elementov*) [61]. Allen genannten Methoden ist gemein, daß zunächst mit gewählten Ansatzfunktionen Elementmatrizen berechnet werden, die die genannten Konvergenzbedingungen zunächst nicht erfüllen. In einem zweiten Schritt werden die Elementmatrizen dann mit unterschiedlichen Strategien

korrigiert. Aufgrund der Stabilisierungseffekte können insbesondere bei nichtlinearen Problemen Effekte auftreten, die nicht von vornherein abzuschätzen sind. Beispielsweise orientiert sich die nichtlineare Stabilitätsanalyse an den kleinsten Eigenwerten der Systemsteifigkeitsmatrix. Da bei einigen genannten Stabilisierungstechniken die Terme auf der Hauptdiagonalen verändert werden, kann bei der Stabilitätsuntersuchung nicht gesichert auf die Beobachtung der kleinsten Eigenwerte zurückgegriffen werden [76]. Das irreguläre Verhalten der Elemente ist somit letztlich durch die Wahl der Ansatzfunktionen bestimmt [70, 61]. Demgegenüber sollten die Ansatzfunktionen so gewählt werden, daß die Konvergenzbedingungen *a priori* erfüllt sind.

Bei der Methode der Finiten Elemente werden vor allem Interpolationsfunktionen in Form von Polynomen verwendet. Die Elementknoten stellen Stützstellen für die Interpolation dar. Die Anzahl der Knoten eines Elements ist nicht notwendigerweise identisch mit der Anzahl der Polynomglieder des verwendeten Polynoms. Es ist üblich [9, 10, 61, 81] Interpolationsfunktionen an Einheitselementen unter Vernachlässigung gewisser Polynomterme aufzustellen. Bei der Transformation auf die tatsächliche Elementgeometrie können die Verschiebungsfelder bereichsweise häufig nicht mehr angemessen dargestellt werden. Es kommt zu den erwähnten unerwünschten Effekten.

Mit Ansatzfunktionen, die über vollständige Polynome abgeleitet werden, tritt dieses Problem nicht auf, da vollständige Polynome sich gegenüber Koordinatentransformationen invariant verhalten [52]. Es kommt damit der Wahl der Elementform bereits eine entscheidende Bedeutung zu. Beispielsweise können für ebene Dreieckselemente bei Membranbelastungen bzw. für Tetraederelemente stets Ansatzfunktionen aus vollständigen Polynomen abgeleitet werden [61].

Für Plattenelemente, für die keine Polynome gefunden werden, deren Anzahl an Koeffizienten der der Knoten entspricht, wird folgende Strategie verfolgt [24]: Da Ansatzfunktionen Verschiebungsfelder für Einheitsverformungen darstellen, stellt die verformte Struktur einen Zustand minimaler Energie dar. Dieses Kriterium soll für die Bestimmung der Koeffizienten der Ansatzfunktionen für das Plattenbiegeproblem herangezogen werden. Die potentielle Energie des Elements wird als Zielfunktional betrachtet, welches dann z.B. über die LAGRANGSCHE'sche Multiplikatorenmethode zu minimieren ist. Mit  $\varepsilon_i$  als Dehnung bezüglich der Einheitsverschiebung in Freiheitsgrad  $i$  ( $\varepsilon_i^T = (\varepsilon_{ixx}, \varepsilon_{iyy}, \varepsilon_{ixy})$ ) und  $\mathbf{D}$  als Elastizitätstensor gilt dann:

$$\int_{V_e} \varepsilon_i^T \mathbf{D} \varepsilon_i dV_e \rightarrow \text{Min} \quad (4.34)$$



Bzw.:

$$\int_{V_e} \varepsilon_{ixx}^2 + \varepsilon_{iyy}^2 + 2\nu \varepsilon_{ixx} \varepsilon_{iyy} + (1 - \nu) \gamma_{ixy}^2 dV_e \rightarrow \text{Min} \quad (4.35)$$

Mit der KIRCHHOFF'schen Hypothese und Dehnungen, die linear von den Deformationsgradienten abhängen, ergibt sich folgender Zusammenhang mit den Interpolationspolynomen  $H_{wi}$ :

$$\varepsilon_i^T = -z \left[ \frac{\partial^2}{\partial xx}, \frac{\partial^2}{\partial yy}, \frac{\partial^2}{\partial xy} \right] H_{wi}, \quad (4.36)$$

mit  $i$  als Index, der über die Freiheitsgrade des Plattenbiegeproblems läuft und  $w$  als Index, der die Freiheitsgrade des Plattenbiegeproblems kennzeichnet. Die Ansatzfunktionen  $\mathbf{H}_w$  werden als Produkt von Polynomen  $\varphi^T = [1, x, y, x^2, xy, \dots]$  mit den Koeffizienten  $\mathbf{c}$  formuliert.

$$\mathbf{H}_w(x, y) = \mathbf{c}^T \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (4.37)$$

Einsetzen in Gl. 4.35 führt auf folgenden zu minimierenden quadratischen Ausdruck für die Koeffizienten  $\mathbf{c}$ :

$$\begin{aligned} & \mathbf{c}^T \int_{V_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial xx} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial xx} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial yy} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial yy} + \nu \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial xx} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial yy} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial yy} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial xx} \right) \\ & + (1 - \nu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial xy} \frac{\partial^2 \varphi^T}{\partial xy} dV_e \mathbf{c} \rightarrow \text{Min} \end{aligned} \quad (4.38)$$

Hierbei fällt auf, daß der Integrand unabhängig von den Koeffizienten  $\mathbf{c}$  ist. Damit läßt sich Gl 4.38 vereinfacht darstellen.

$$\mathbf{c}^T \mathbf{Z} \mathbf{c} \rightarrow \text{Minimum} \quad (4.39)$$

Die Matrix  $\mathbf{Z}$  ist von der Elementgeometrie und von der Poissonzahl  $\nu$  abhängig und kann durch Integration über das Elementvolumen bestimmt werden.

Zu den Randbedingungen für die Ansatzfunktionen läßt sich feststellen: Für die Konvergenz von Plattenelementen wird sowohl die Stetigkeit des Funktionswertes der Ansatzfunktion als auch die Stetigkeit der ersten Ableitung an den Rändern benachbarter Elementen gefordert [9]. Für ein dreiknotiges Plattenelement werden

die Randbedingungen an den Knoten und an den Seitenhalbierenden im Funktionswert sowie deren partiellen Ableitungen bestimmt. Entlang einer Elementkante sollen sich die Verschiebungen über Polynome dritter Ordnung darstellen lassen. Normal zu den Kanten wird jeweils ein linearer Verlauf angenommen. Die Randbedingungen  $\mathbf{Q}$  werden wiederum als Linearkombination aus Funktionswert bzw. partieller Ableitungen von  $\varphi$  und den unbekannten Koeffizienten  $\mathbf{c}$  formuliert. Mit  $\mathbf{A}^T = \left[ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots \right]$  lautet die lineare Beziehung:

$$\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{Q} \quad (4.40)$$

Das Optimierungsproblem zur Bestimmung der Koeffizienten  $\mathbf{c}$  der Ansatzfunktionen des Plattenbiegeproblems lautet somit:

$$\text{Minimiere } \mathbf{c}^T \mathbf{Z} \mathbf{c} \text{ unter der Nebenbedingung } \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{Q} \quad (4.41)$$

Dies stellt ein quadratisches Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen dar. Mit den LAGRANGE'schen Multiplikatoren  $\kappa$  lässt sich dann folgendes lineares Gleichungssystem formulieren, das eine eindeutige Lösung besitzt:

$$\begin{bmatrix} 2\mathbf{Z} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Um maximal 18 Randbedingungen berücksichtigen zu können, wurde ein Polynom fünfter Ordnung (dieses hat 21 Polynomglieder) gewählt. Obiges Gleichungssystem hat somit die Dimension 39\*39. Abb. 4.1 stellt die Formfunktionen für den Translationsfreiheitsgrad in  $z$ -Richtung sowie die Verdrehfreiheitsgrade um die  $x$ -Achse sowie um die  $y$ -Achse an einem Knoten eines Elements dar. Mit

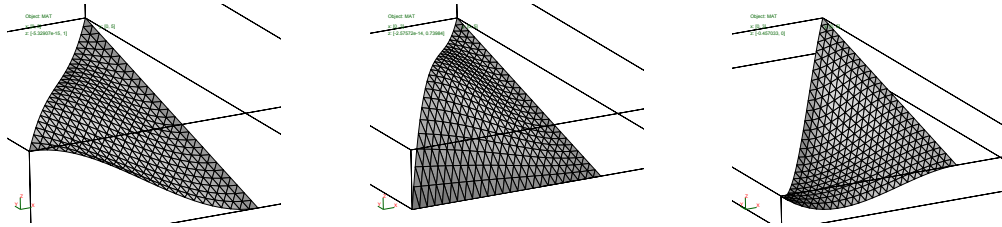


Abbildung 4.1: Formfunktionen für Plattenbiegeproblem am Knoten 1

den so bestimmten Ansatzfunktionen können auch bei starken Verzerrungen der Elementgeometrie noch Steifigkeits- und Massenmatrizen berechnet werden, die die Konvergenzkriterien erfüllen. Dies erfordert zusätzlichen Rechenaufwand zur Bestimmung der Ansatzfunktionen, die jedoch für jede Struktur nur einmal durchgeführt werden müssen. Beispiele zum Einsatz des dreiknotigen Platten-Membran Elements SHELL3N in SIANG sind in Anhang C und Anhang D aufgeführt.

## 4.3 Behandlung von Netzsingularitäten

Knoten einer Struktur müssen nicht notwendigerweise Steifigkeitsanteile in allen Freiheitsgraden haben. Beispielsweise haben Knoten für isoparametrische Volumenelemente Steifigkeitsanteile in den 3 Verschiebungsfreiheitsgraden, Knoten für Feder und Stabelemente besitzen Translationssteifigkeitsanteile nur in Richtung der Elementachse, Knoten vieler Platten-Membranelemente haben Steifigkeitsanteile in drei Verschiebungs- sowie zwei Rotationsfreiheitsgraden. Die globale Steifigkeitsmatrix kann mit solchen Elementen einen Rangabfall besitzen. Um dies zu vermeiden, existieren unterschiedliche Strategien: Ein Streichen der überzähligen Freiheitsgrade von Hand erweist sich häufig als nicht praktikabel. In [9, 81] wird daher vorgeschlagen, bei Platten-Membran Elementen künstliche Steifigkeiten auf die Hauptdiagonale der lokalen Elementsteifigkeitsmatrix für die Rotationsfreiheitsgrade senkrecht zur Plattenebene zu addieren. Der Term muß groß genug sein, um eine Lösung des Gleichungssystems zu ermöglichen, und klein genug, um keinen merklichen Einfluß auf die Lösung zu haben. Vorgeschlagen wird  $\frac{1}{10000}$  des kleinsten Hauptdiagonalterms zu verwenden [9]. Für eine lineare Problemstellung ist diese Methode weit verbreitet, jedoch tauchen auch hier unter Umständen bei Verwendung von iterativen Gleichungslösern nach der Methode der konjugierten Gradienten Probleme aufgrund der ungünstigen Kondition der Steifigkeitsmatrix auf. Insbesondere bei nichtlinearen Stabilitätsberechnungen führt die Anwendung dieser Methode zu Problemen, da die verwendeten Algorithmen sich an den kleinsten Eigenwerten der Systemsteifigkeitsmatrix orientiert. Die kleinsten Eigenwerte stellen zunächst jedoch künstliche Steifigkeitsanteile dar.

Insbesondere für Platten-Membranelemente gibt es Ansätze, den Verdrehfreiheitsgraden in Elementnormalenrichtung physikalische Steifigkeiten zuzuordnen [3, 12, 27, 34, 71], um damit das Problem einer singulären Systemsteifigkeitsmatrix zu umgehen. Auch für Volumenelemente gibt es vergleichbare Ansätze [55]. Die Elemente sind jedoch häufig in der Verwendung nicht unproblematisch, beispielsweise neigen sie verstärkt zum *locking* (siehe Kap. 4.2.1). Die erwähnten Formulierungen sind bis auf [34] lediglich geometrisch linear und somit z.B. für Stabilitätsbetrachtungen nicht anwendbar. Naheliegend ist jedoch, geometrische Randbedingungen in Richtung der Netzsingularitäten automatisiert einzuführen und dadurch Freiheitsgrade, denen keine Steifigkeit zugeordnet ist, zu streichen, siehe z.B. [50]. Dieses Verfahren gelangt in einer erweiterten Form im Programm SIang [19, 20] zur Anwendung.

Prinzipiell lassen sich Freiheitsgrade eines Knotens in drei Klassen einteilen: 1. aktive Freiheitsgrade, 2. Freiheitsgrade, die geometrischen Randbedingungen unterliegen sowie 3. solche, denen auf Grund der Elementformulierung keine Steifigkeitsterme zugeordnet sind. Die Freiheitsgrade der letzten Klasse sind stets isoliert. Ferner sind Rotationsfreiheitsgrade und Translationsfreiheitsgrade stets entkoppelt. Somit lassen sich nach einem ersten Zusammenbau der Systemsteifigkeitsmatrix Knotensteifigkeiten für Rotation und Translation zusammenstellen. Dies liefert für jeden Knoten zwei Matrizen  $\mathbf{K}_n$  mit der höchsten Dimension drei. Diese Matrix kann spektral zerlegt werden.

$$\mathbf{K}_n = \Phi_n^T \mathbf{K}_{ndiag} \Phi_n \quad (4.43)$$

Die Diagonalmatrix  $\mathbf{K}_{ndiag}$  enthält die Eigenwerte  $\lambda_n$  von  $\mathbf{K}_n$ , denen die Eigenvektoren  $\Phi_n$  zugeordnet sind. Eine Netzsingularität sei dann über folgende Bedingung gekennzeichnet:

$$\lambda_{ni} \leq \Delta \quad (4.44)$$

Sofern Gl. 4.44 erfüllt ist, wird eine geometrische Randbedingung für Rotation bzw. Translation in Richtung des zu  $\lambda_{ni}$  zugehörigen Eigenvektors eingeführt. Gl. 4.44 wird für alle Knoten der Struktur überprüft. Die im folgenden Schritt aufgebaute Systemsteifigkeitsmatrix ist regulär und verfügt über den korrekten Rang. Zur Bestimmung der Grenze  $\Delta$  wird die mit  $c_{cond}$  bezeichnete Konditionszahl der Systemsteifigkeitsmatrix eingeführt. Die Konditionszahl bestimmt sich aus dem Quotienten zwischen größtem und kleinstem Eigenwert. Damit läßt sich die in Gl. 4.44 eingeführte Grenze  $\Delta$  ersetzen:

$$\lambda_{ni} \leq \frac{\lambda_{\max}}{c_{cond}} \quad (4.45)$$

Gl. 4.45 stellt die Bedingung für die Einführung von geometrischen Randbedingungen in Richtung des Eigenvektors  $\Phi_i$  dar. Die Konditionszahl der Systemsteifigkeitsmatrix wird vorgegeben, der größte Eigenwert der Struktur wird z.B. über Vektoriteration mit einer geringen Genauigkeitsanforderung abgeschätzt.

# Kapitel 5

## Beispiele

Das in den vorangegangenen Kapiteln abgeleitete Verfahren wird im folgenden zur Berechnung verschiedener Beispiele herangezogen. Die Auswahl der Beispiele und die Festlegung der Abmessungen richtet sich primär nach verfügbaren Vergleichsergebnissen aus der Literatur und nicht nach praktischen Anwendungen aus dem Gebiet des Bauingenieurwesens. Auf folgende Fragestellungen soll eingegangen werden:

- Welche Verfahren eignen sich zur Berechnung der kritischen Punkte.
- In welchen Fällen kann ein Unterraum der Zufallsvariablen formuliert werden, mit dem das Strukturverhalten approximativ beschrieben werden kann.
- Inwieweit können die asymptotischen Verfahren direkt zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit herangezogen werden.
- Gelingt es die asymptotischen Verfahren als Sensitivitätsanalyse zur Selektion der wichtigsten Zufallsvariablen heranzuziehen.
- Welche Größen sind hierfür maßgebend.
- Welche Aussagen können bezüglich der kritischen Imperfektionsform getroffen werden.
- Welche Rechenzeiten werden mit dem beschriebenen Interaktionsverfahren im Vergleich zu direkten Monte Carlo Verfahren benötigt.

In allen Beispielen gelten Größe und Richtung der Belastung, sowie die Materialeigenschaften als deterministisch. Die geometrischen Imperfektionen werden als skalare Zufallsfelder berücksichtigt. Zunächst wird die kritische Last für das perfekte System bestimmt und das Nachbeulverhalten der Struktur untersucht. Dann wird auf das Imperfektionsverhalten eingegangen. Die wichtigsten Zufallsvariablen werden identifiziert und die Versagenswahrscheinlichkeit der Strukturen wird für mehrere Lastniveaus mit den in Kap. 2.3 beschriebenen Methoden sowie zum Vergleich mit direkten Monte Carlo Verfahren berechnet. Die angegebenen Rechenzeiten beziehen sich auf eine SGI PowerChallenge mit 2 R8000 Prozessoren (75Mhz) und 1 Gigabyte Hauptspeicher. Alle Berechnungen wurden in skalarer Form durchgeführt.

## 5.1 Imperfekter Bogen unter Einzellast

Als erstes Beispiel wird das in Abb. 5.1 skizzierte Tragwerk betrachtet, daß u.a. in [15, 75, 76] behandelt wurde. Für die Struktur soll ein elastisches Materialge-

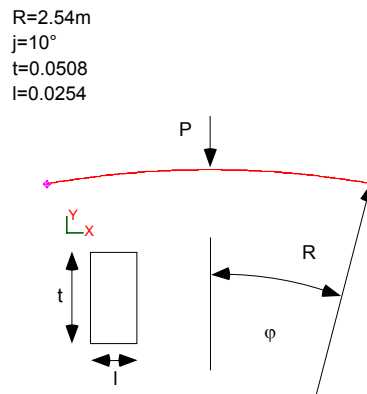


Abbildung 5.1: Abmessungen des Bogens

setz gültig sein. Der Bogen ist mit 125 Knoten und 124 Elementen diskretisiert und beidseitig gelenkig gelagert. Die Berechnung erfolgt in der  $xy$  - Ebene, die Struktur hat 371 Freiheitsgrade.

Geometrische Imperfektionen des Tragwerks in Form einer Lageabweichung der Schwerlinie des Bogens in radialer Richtung werden berücksichtigt. Hierfür wird ein homogenes, isotropes, mittelwertfreies Zufallsfeld mit einer Standardabweichung  $\sigma = 1 * 10^{-3}m$  angenommen. Die Korrelationsfunktion ist von exponenti-

ellem Typ (Gl. 2.8) mit einer Korrelationslänge  $l_H = 1m$ . Die Lage beider Auflager soll zunächst nicht zufällig sein, damit liegt ein bedingtes Zufallsfeld vor (“ Fall A”).

### 5.1.1 Asymptotisches Stabilitätsverhalten

Durch Laststeigerung und erweiterte Systeme (s. Kap. 3.7.3) wird die kritische Last zu  $\lambda_c = 294.71$  bestimmt ([76]:  $\lambda_c = 293.9$ , [15]:  $\lambda_c = 295.04$ ). Das Verhältnis des niedrigsten Eigenwerts im belasteten System zum Eigenwert des unbelasteten System liegt bei  $1 * 10^{-10}$ . Die “Knickform” ist in Abb. 5.2 skizziert.

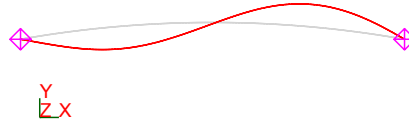


Abbildung 5.2: ‘Knickform’ des Bogens

Mit  $\Phi_1^T \mathbf{P} = 9.7 * 10^{-8}$  wird die Singularität als Verzweigungspunkt identifiziert. Aus der Verzweigungsgleichung (Gl. 3.19) werden im singulären Punkt die folgenden Koeffizienten berechnet:

$$a_1 = 1.6 * 10^{-5} \frac{N}{m^3}, \quad b_1 = -0.155 \frac{N}{m^2}, \quad c_1 = 3.5 * 10^{-8} \frac{N}{m}$$

Da  $|a_1| \ll |b_1|$  und  $c_1 \approx 0$  gilt, liegt ein symmetrisches Verzweigungsproblem vor. Um zu entscheiden, ob die Singularität stabil bzw. instabil ist, wird die Krümmung des Sekundärpfades im kritischen Punkt untersucht (Gl. 3.36, Gl. 3.37).

$$e_1 = 3.72 * 10^3 \frac{N}{m^4}, \quad f_1 = -1.25 * 10^3 \frac{N}{m^4}$$

Da  $\frac{e_1 - 3f_1}{b_1} > 0$ , ist die Verzweigung symmetrisch instabil.

## 5.1.2 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Die Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix des Zufallsfeldes führt auf probabilistisch gewichtete Imperfektionsformen. Die ersten vier dieser Formen sind in Abb. 5.3 stark überhöht dargestellt. Auf den Abbildungen sind die Standardabweichungen der Amplituden mit ausgewiesen.

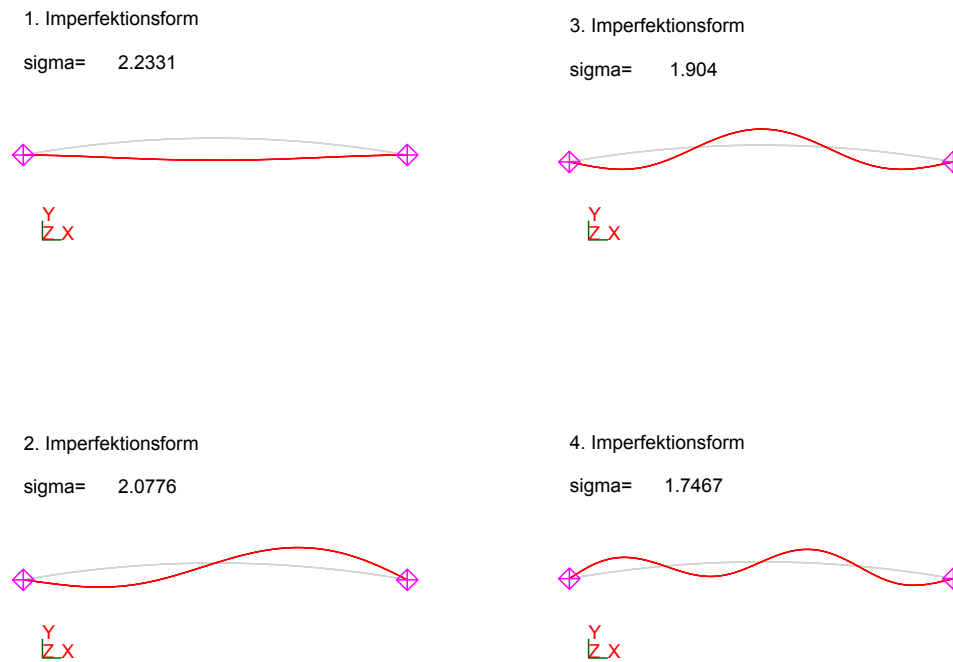


Abbildung 5.3: Imperfektionsformen für Zufallsfeld mit zwei Bedingungen

In der spektralen Darstellung des Zufallsfeldes stellen die Amplituden die zufälligen Größen dar. Sie sind normalverteilt mit Varianzen die den Eigenwerten der Kovarianzmatrix entsprechen. Für diese Zufallsvariablen wird nach Realisationen gesucht, bei dem der Übergang vom stabilen zum instabilen Verhalten des Systems erfolgt. Eine strukturmechanisch orientierte Wichtung der Zufallsvariablen erfolgt durch den in Kap. 3.4 abgeleiteten funktionalen Zusammenhang zwischen Imperfektionsamplitude und kritischer Last. Das Imperfektionsgesetz für symmetrische Verzweigungspunkte (Gl. 3.69) wird nach der Amplitude aufgelöst und auf die Standardabweichung der Imperfektionsform bezogen. Somit gelingt eine



asymptotische Beschreibung des Grenzzustandes.

$$\left(\frac{y}{\sigma_y}\right)_{ij} = \frac{b_1 \lambda_c^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{4}{27} \frac{6b_1}{e_1+3f_1}}}{\beta_0 \Phi_1 \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}} \sqrt{\left(\frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c}\right)^3} = s_{ij} \sqrt{\left(\frac{\lambda_c - \lambda}{\lambda_c}\right)^3} \quad (5.1)$$

Die Indizes  $ij$  kennzeichnen die Kombination der Zufallsvariablen. Die Überlagerung erfolgt bei jeweils gleichem Vielfachen der Standardabweichung.  $\beta_0$  stellt die Bezugsamplitude der resultierenden Imperfektionsform dar. Die dimensionslose Größe  $s_{ij}$  kann als Sensitivitätsmaß interpretiert werden. Kombinationen  $ij$  mit kleinen  $s_{ij}$ -Werten haben großen Einfluß auf die Versagenswahrscheinlichkeit. Der von der Imperfektionsform abhängige Gradient  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}$  wird numerisch mit einem zentralen finite Differenzenverfahren bestimmt.

Zunächst werden die  $s_{ij}$ -Werte ( $i = j$  mit  $i = 1, 100$  wobei  $Q = 1.00$  gilt (Gl. 2.18)) berechnet. Für die zweite Imperfektionsform, die nahezu der zweiten Beulform entspricht, ergibt sich  $s_{22} = 363.25$ . Für alle anderen Formen werden Werte in der Größenordnung von  $s_{ii} \approx 10^{10}$  mit  $i \neq 2$  berechnet. Damit ist für nur die 2. Imperfektionsform relevant. Für die Versagenswahrscheinlichkeit (Gl. 2.22) gilt daher:

$$p_f = 2\Phi\left(-s_{22}\left(\frac{\Delta\lambda}{\lambda}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \quad (5.2)$$

Der Faktor 2 resultiert aus der Symmetrie des Problems. Abb. 5.4 zeigt einen Vergleich mit einer direkten Monte Carlo Simulation. Hierfür wurden für 4000 Realisationen des Zufallsfeldes jeweils die kritische Belastung explizit am imperfekten System berechnet. Bis  $p_f = 10^{-2.5}$  sind die Kurven nahezu deckungsgleich. Ab dieser Größenordnung ist eine Aussage statistisch nicht gesichert ( $\frac{\sigma_{p_f}}{p_f} = 0.25$ ). Während die direkte Monte Carlo Simulation ca. 3 Tage Rechenzeit benötigte, gelang die asymptotische Berechnung letztlich durch eine Bildung des Gradienten  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}$  in wenigen Sekunden.

Folgende geringfügige Modifikation des Problems wurde vorgenommen. Das Zufallsfeld sei nun lediglich am rechten Auflager deterministisch ("Fall B"). Damit ergibt sich eine andere Kovarianzstruktur und andere Imperfektionsformen. Die ersten vier Formen sind überhöht in Abb. 5.5 dargestellt.

Die Vorgehensweise entspricht "Fall A". In Tab. 5.1 sind die Sensitivitätswerte in Bezug auf den minimalen Wert für die wichtigsten zehn Zufallsvariablen aufgeführt.

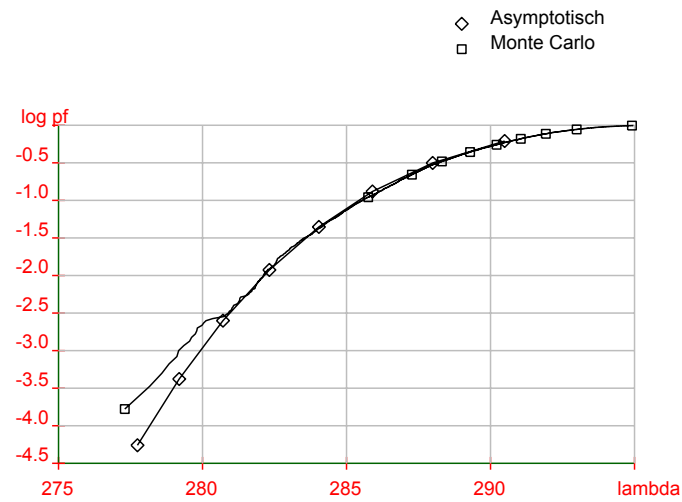
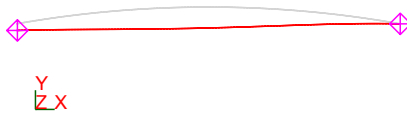


Abbildung 5.4:  $\lambda - p_f$  Beziehung für den Bogen (2 Bedingungen des Zufallsfeldes)

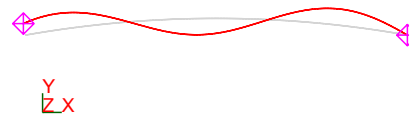
1. Imperfektionsform

sigma= 2.2453



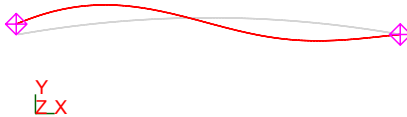
3. Imperfektionsform

sigma= 1.9477



2. Imperfektionsform

sigma= 2.11



4. Imperfektionsform

sigma= 1.7925

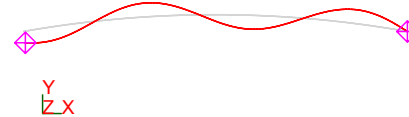


Abbildung 5.5: Imperfektionsformen für Zufallsfeld mit einer Zwangsbedingung

Variable $i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\frac{s_{ii}}{s_{22}}$	1.0	1.9	2.9	3.7	4.3	5.2	5.6	6.3	7.0	7.5

Tabelle 5.1: Sensitivitätsmaße für die wichtigsten 10 Zufallsvariablen

Ab  $i = 2$  nimmt der Einfluß der Imperfektionsformen kontinuierlich ab. Für  $i = 2, 11$  werden die gemischten Terme  $\frac{s_{ij}}{s_{22}}$  berechnet.

Die Grenzzustände dieser Zufallsvariablen werden ebenfalls am imperfekten System bestimmt. Die Imperfektionsamplituden werden um das  $n$ -fache der Standardabweichung der entsprechenden Zufallsvariable gesteigert und auf die Knotenkoordinaten des System addiert. Die Vorzeichen für die Kombination der Zufallsvariablen werden entsprechend den Ergebnissen der asymptotischen Rechnung gewählt. Die Berechnung der kritischen Last des imperfekten Systems erfolgt durch Laststeigerung und erweiterte Systeme (vgl. Kap. 3.7.3). Hierfür wurden die Amplituden (in 6 Schritten) äquidistant bis auf das 6-fache der Standardabweichung gesteigert. Die gesuchte Imperfektionsamplitude, für die am definierten Lastniveau Stabilitätsversagen eintritt, wird über Interpolation bestimmt. Dieses Verfahren erwies sich bezüglich der Rechenzeit günstiger als ein ebenfalls mögliches Bisektionsverfahren.

Die Versagenswahrscheinlichkeit wurde nach der *Adaptive Sampling* Methode (5000 Realisationen) mit den asymptotisch und den explizit bestimmten Grenzzustandspunkten berechnet. Zum Vergleich wurde eine direkte Monte Carlo Simulation mit 8000 Realisationen durchgeführt. Abb. 5.6 zeigt die Berechnungsergebnisse.

Im Unterschied zum “Fall A” kann jetzt mit asymptotischen Berechnungen lediglich eine Näherung der Versagenswahrscheinlichkeit bestimmt werden. Die Berechnungen am imperfekten System entsprechen der Monte Carlo Simulation nahezu exakt. Es zeigte sich, daß eine Kombination der expliziten und asymptotischen Grenzzustandspunkte möglich ist. Auch mit den 10 wichtigsten explizit bestimmten Kombinationen wird die Versagenswahrscheinlichkeit nahezu exakt ermittelt.

Abb. 5.7 zeigt (stark überhöht) Imperfektionsformen am Bemessungspunkt für unterschiedliche Lastniveaus. Die Imperfektionsform entspricht im wesentlichen der Beulform. Diese Form stellt im untersuchten Wertebereich von  $\lambda$  die Störform dar, die den höchsten Beitrag zur Versagenswahrscheinlichkeit liefert. Die Rand-

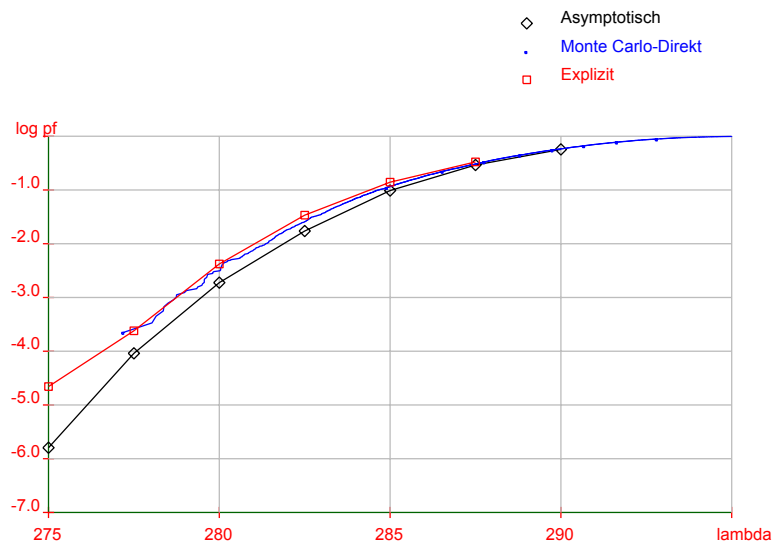


Abbildung 5.6:  $\lambda - p_f$  Beziehung für den Bogen (1 Bedingung des Zufallsfeldes)

bedingung der Beulform werden nicht exakt wiedergegeben.

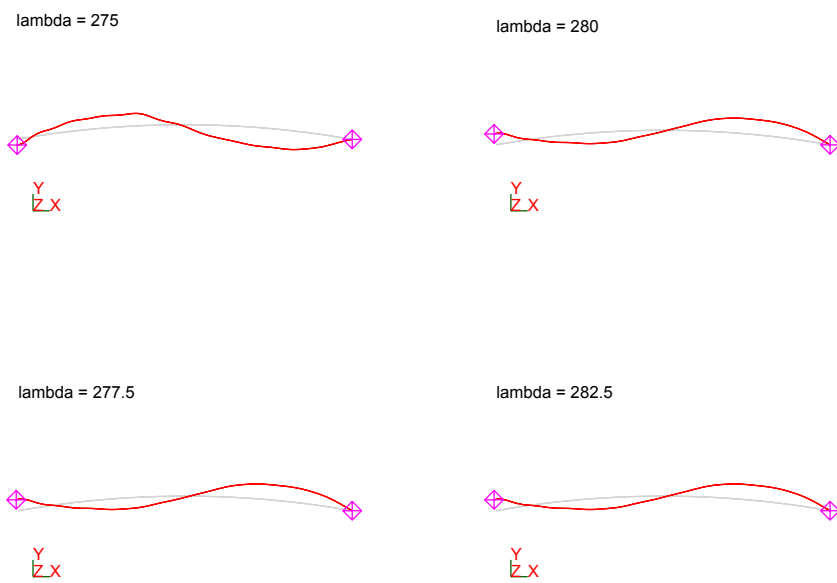


Abbildung 5.7: Imperfektionsform am Bemessungspunkt

Die direkte Monte Carlo Simulationen benötigte ca. 4 Tage, die asymptotischen Berechnung der Grenzzustandspunkte und des kritischen Punktes lediglich 2 Minuten Rechenzeit. Die explizite Berechnung am imperfekten System für die 10 wichtigsten Kombinationen der Zufallsvariablen benötigte für dieses verhältnismäßig kleine System bereits 2 Stunden CPU-Zeit.

## 5.2 Rotationssymmetrisches Stabtragwerk

Als zweites Beispiel wird ein Stabtragwerk, vgl. Abb. 5.8, untersucht. Das Trag-

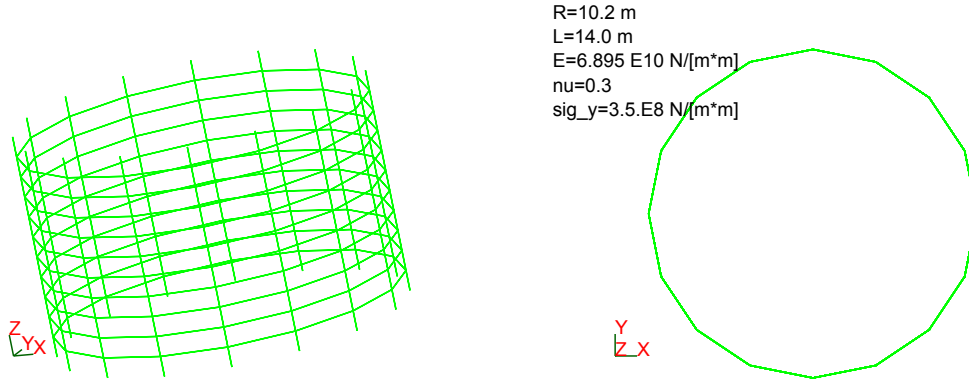


Abbildung 5.8: Stabtragwerk unter einachsiger Belastung

werk ist durch 336 Finite Elemente und 200 Knoten diskretisiert. Die Freiheitsgrade der Knoten bei  $z = 0$  sind gesperrt. Bei  $z = L$  sind lediglich vertikale Verschiebungen zugelassen. An diesen Knoten wird eine Kraft von  $1 * 10^4 \text{ N}$  in negativer  $z$ -Richtung eingeleitet. Die Struktur hat 996 Freiheitsgrade. Die Stäbe sind als kreisförmige Hohlquerschnitte mit Radius  $R_2 = 0.1 \text{ m}$  und Wanddicke  $d = 0.01 \text{ m}$  angenommen. Für dieses Beispiel soll ein ideal elasto-plastisches Materialverhalten zugrundegelegt werden. Für die perfekte Struktur erfolgt Stabilitätsversagen im elastischen Zustand ( $\sigma_c = 2.49 * 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ). Die Fließspannung soll mit  $\sigma_y = 3.5 * 10^8 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  deutlich über dem Spannungszustands im singulären Punkt des perfekten Systems liegen. Geometrische Imperfektionen in radialer Richtung werden als Zufallsfeld berücksichtigt. Das Zufallsfeld ist homogen, mittelwertfrei und normalverteilt und hat eine Standardabweichung  $\sigma = 0.01 \text{ m}$  ("Fall A"). Die Einspannungen werden als deterministisch angenommen. Die Korrelationsfunktion, auf die nochmals in Kap. 5.3 näher eingegangen wird, ist orthotrop. Die Korrelation in Umfangsrichtung ist unabhängig von der Korrelation in Längsrichtung, die Korrelationsfunktion in Längsrichtung und in Umfangsrichtung entsprechen denen in Kap. 5.3.

### 5.2.1 Asymptotisches Stabilitätsverhalten

Der kritische Punkt wird durch Laststeigerung und Bisektionsverfahren ermittelt. Bei  $\lambda = 155.7$  (bei  $\|\mathbf{P}\| = 2 * 10^5 N$ ) tritt für die symmetrische Struktur unter axialer Belastung eine doppelte Singularität auf. Das Verhältnis des niedrigsten Eigenwerts am belasteten System zum unbelasteten System beträgt  $1 * 10^{-8}$ . Eine der beiden Beulformen ist in Abb. 5.9 dargestellt.

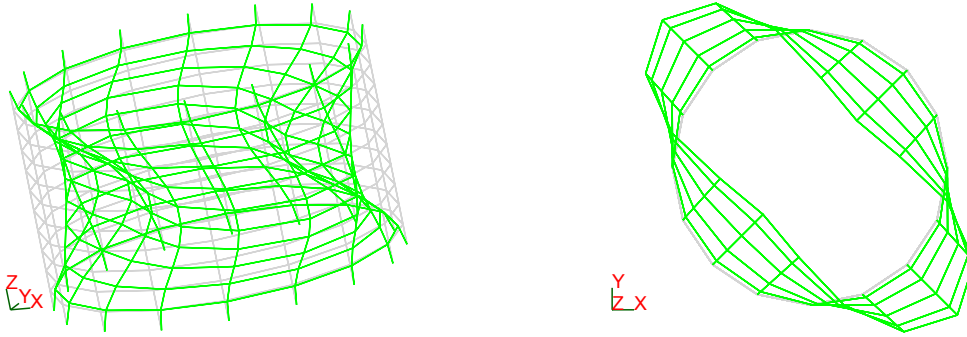


Abbildung 5.9: Beulform

Es gilt  $\Phi_1^T \mathbf{P} = \Phi_2^T \mathbf{P} = 0$ , die Singularität stellt ein Verzweigungsproblem dar. Für die doppelte Singularität ergeben sich aus der Verzweigungsgleichung (s. Kap. 3.5) folgenden Koeffizienten (Gl. 3.73 bis Gl. 3.75):

$$a_{ijl} = 0 \quad \text{mit} \quad i, j, l = 1, 2 \quad (5.3)$$

$$b_{11} = b_{22} = -0.87 * 10^3 \frac{N}{m^3} \quad (5.4)$$

$$b_{12} = b_{21} = 0 \quad (5.5)$$

$$c_1 = c_2 = 0$$

Mit  $a_{ijl} = 0$  (für  $i, j, l = 1, 2$ ) ist die Verzweigung symmetrisch. Folgende Koeffizienten zur Beschreibung der Krümmung der Gleichgewichtspfade (s. Gl. 3.83,

Gl. 3.84) werden ermittelt:

$$\begin{aligned}
e_{1111} &= e_{2222} = 3 * 36.98 * 10^3 \frac{N}{m^4} \\
e_{1112} &= e_{1222} = e_{2111} = e_{2222} = 0 \\
e_{1121} &= e_{1211} = e_{2122} = e_{2212} = 2 * 36.98 * 10^3 \frac{N}{m^4} \\
e_{1122} &= e_{1212} = e_{1221} = e_{2112} = e_{2121} = e_{2211} = 1 * 36.98 * 10^3 \frac{N}{m^4} \quad (5.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{1111} &= f_{2222} = -36.30 * 10^3 \frac{N}{m^4} \\
f_{1122} &= f_{2211} = -21.97 * 10^3 \frac{N}{m^4} \\
f_{1212} &= f_{1221} = f_{1211} = f_{2121} = -7.16 * 10^3 \frac{N}{m^4} \\
f_{1112} &= f_{1121} = f_{1211} = f_{1222} = f_{2111} = f_{2122} = f_{2212} = f_{2221} = 0 \quad (5.7)
\end{aligned}$$

Würde nur eine einfache Singularität berücksichtigt, ergäbe sich mit  $\frac{e_{1111}-3f_{1111}}{b_{1111}} < 0$  ein stabiler Verzweigungspunkt. Die Berücksichtigung der doppelten Verzweigung ist damit für eine Klassifizierung des Systems wesentlich.

Für Mehrfachverzweigungen wurde zur Ableitung der Last-Imperfektionsbeziehung in Kap. 3.5 der gleichen Ansatz wie für einen einfachen Verzweigungspunkt gewählt. Jedoch stellt die zu berücksichtigende Beulform eine Linearkombination der Singulärvektoren dar. Mit der Zwangsbedingung Gl. 3.77 läßt sich die Linearkombination für eine doppelte Singularität dann wie folgt darstellen:

$$\Phi_M(\theta) = \sin(\theta)\Phi_1 + \cos(\theta)\Phi_2, \quad \text{mit } 0 \leq \theta < 2\pi \quad (5.8)$$

Dieser Singulärvektor geht in das Skalarprodukt aus Rückstellkräften und Beulvektor, in die Nachbeulkoeffizienten und damit auch in die kritische Last des imperfekten Systems ein. Für die Funktion  $\lambda(\theta)$  kann ein Minimum bestimmt werden, das als Entscheidungskriterium zur Selektion der entscheidenden Imperfektionsformen dienen soll:

$$\lambda = \lambda_c - \frac{e_M(\theta) + 3f_M(\theta)}{2b_M} \left( \frac{3\beta\Phi_M^T(\theta) \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}}{e_M(\theta) + 3f_M(\theta)} \right)^{\frac{2}{3}} \rightarrow \text{Minimum} \quad (5.9)$$



Für die Koeffizienten aus Gl. 5.6 und 5.7 ergibt sich dann:

$$b_M = -0.87 * 10^3 \frac{N}{m^2} \quad (5.10)$$

$$e_M(\theta) = -36.98 * 10^3 \frac{N}{m^4} * (3 + 4 \sin(\theta) \cos(\theta)) \quad (5.11)$$

$$f_M = -36.30 * 10^3 \frac{N}{m^4} \quad (5.12)$$

Die Imperfektionsformen beeinflussen das Systemverhalten in unterschiedlichem Maße. Durch die Änderung des Strukturverhaltens kann eine monoton ansteigende Beziehung zwischen Last und Verformung auftreten (s. Abb. 5.10). In einem

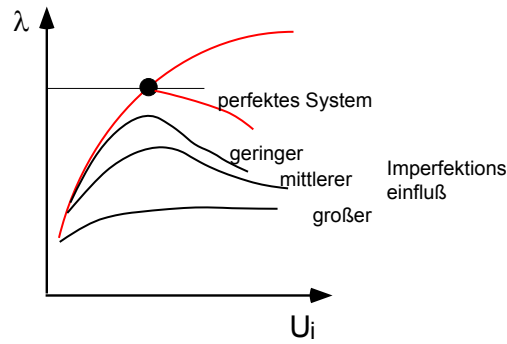


Abbildung 5.10: Einfluß unterschiedlicher Imperfektionsformen

solchen Fall ist die Suche nach dem kritischen Punkt am imperfekten System für ein elastisches Materialgesetz erfolglos, bzw. führt unter Umständen auf einen anderen kritischen Punkt. Mit elasto-plastischen Materialgesetzen ergibt sich durch die Plastifizierungseffekte ein Durchschlagsproblem [41]. Da letztlich ein anderer physikalischer Vorgang vorliegt, kann eine quantitative Aussage, die auf den asymptotischen Imperfektionsgesetzen für die elastische perfekte Struktur basiert, das reale Strukturverhalten nicht erfassen.

Abb. 5.11 bis Abb. 5.13 zeigen Untersuchungen des asymptotischen Imperfektionsgesetzes für diese 2-fach Verzweigung. Dargestellt sind jeweils in der linken Abbildung die kritische Last als Funktion von  $\theta$  für mehrere Imperfektionsamplituden, sowie in der rechten Abbildung ein Vergleich der kritischen Lasten für die asymptotische und die direkt am imperfekten System durchgeführte Berechnung. Die maßgebenden Größen sind die Skalarprodukte  $\Phi_1^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}$  und  $\Phi_2^T \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \beta}$ .

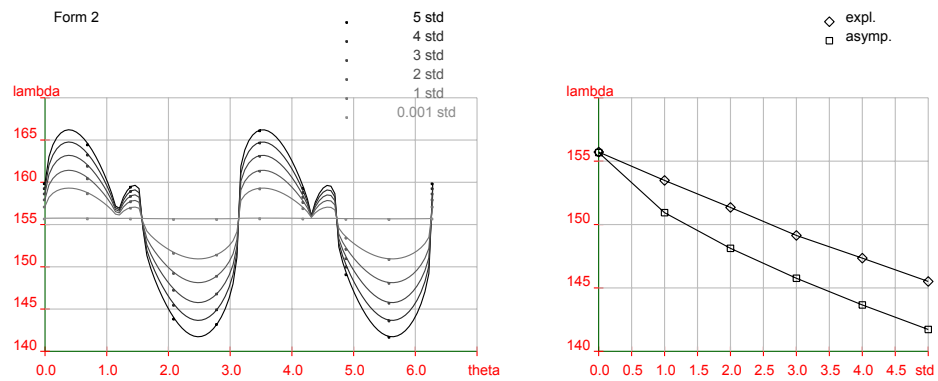


Abbildung 5.11: Asymptotisch und explizite Berechnung für Form 2

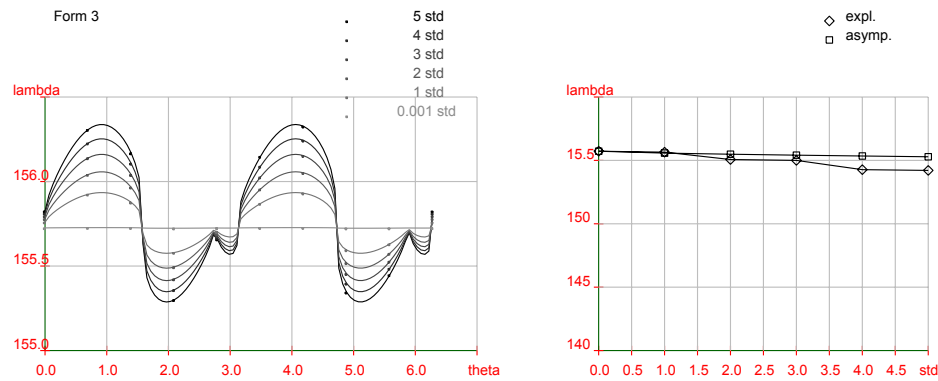


Abbildung 5.12: Asymptotisch und explizite Berechnung für Form 3

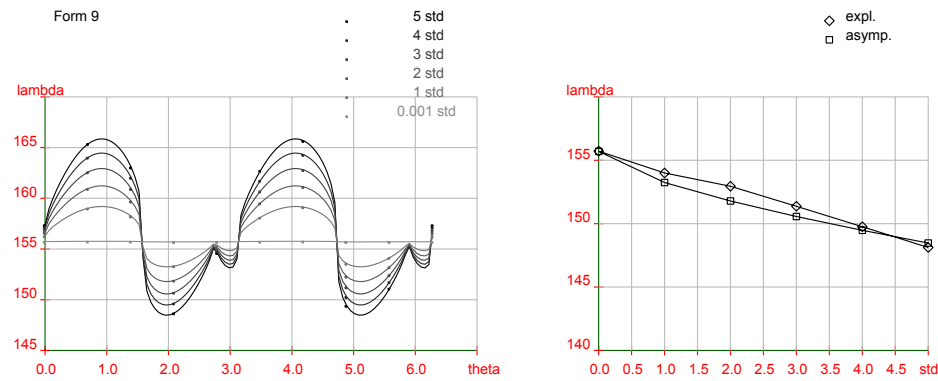


Abbildung 5.13: Asymptotisch und explizite Berechnung für Form 9

Die Imperfektionsformen 2 und 9 üben einen großen Einfluß auf das Tragverhalten der Struktur aus. Das Stabilitätsversagen wird in beiden Fällen durch Plastifizierung eingeleitet. Die Imperfektionsform 3 bewirkt lediglich eine kleine Änderung der kritischen Last. Mit den asymptotischen Gesetze kann dieses Verhalten numerisch effizient nachvollzogen werden.

## 5.2.2 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Zur Beschreibung der Grenzzustände wird das Imperfektionsgesetz nach der Amplitude aufgelöst (vgl. Gl. 5.1). Das Sensitivitätsmaß  $s_{ij}$  ist hierbei vom Parameter  $\theta$  abhängig. Wiederum soll das Minimum maßgeblich sein, wobei die Extremwertbildung numerisch erfolgt. Die wichtigsten acht Zufallsvariablen sind gemäß Tab. 5.2:

Variable	2	1	10	9	21	20	33	32
$\frac{s_{ii}}{s_{22}}$	1	1.6	1.7	2.7	8.0	12.8	24.5	39

Tabelle 5.2: Sensitivitätsmaße für die wichtigsten 8 Zufallsvariablen

Auch bei diesem Beispiel haben sehr wenige Zufallsvariablen Einfluß auf das Stabilitätsverhalten der Struktur. Abb 5.14 zeigt die Imperfektionsformen 2, 10, 21 und 33.

Aufgrund der Symmetrie der Struktur treten die Imperfektionsformen paarweise auf. Für die nichtlinearen Grenzzustandsberechnung (vgl. Kap. 5.1) am imperfekten System werden die in Tab 5.2 aufgeführten Zufallsvariablen berücksichtigt. Die Versagenswahrscheinlichkeit wird mit *Adaptive Sampling* und *FORM* bestimmt. Es wurde eine vergleichende direkte Monte-Carlo Simulation mit 700 Realisationen durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Abb. 5.15 zusammengefaßt. Die Versagenswahrscheinlichkeit nach dem *Adaptive Sampling* Verfahren entspricht dem Ergebniss der direkten Monte Carlo Simulation. Für die *FORM* Berechnung, bei der lediglich der Bemessungspunkt berücksichtigt wird, ergeben sich deutliche Unterschiede. Die Beulform stellt für alle untersuchten Lastniveaus die Imperfektionsform dar, die den größten Einfluß bezüglich der Versagenswahrscheinlichkeit liefert. Abb. 5.16 zeigt einen Vergleich der Beulform mit den Imperfektionsformen am Bemessungspunkt für mehrere Lastniveaus. Die Amplituden wurden normiert, alle Darstellungen sind mit dem gleichen Skalierungsfaktor

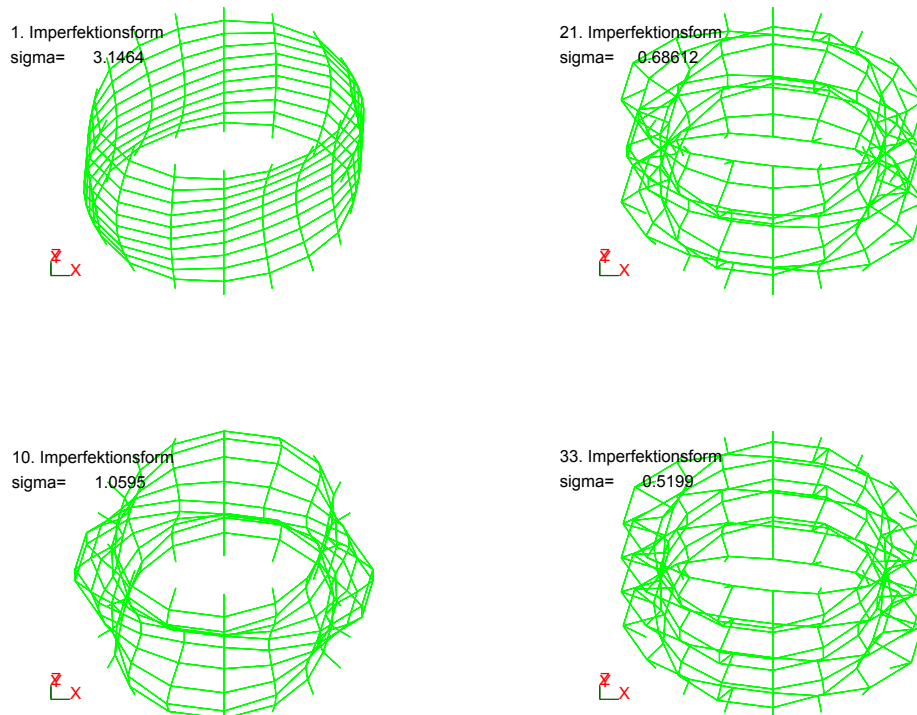


Abbildung 5.14: Imperfektionsformen des Stabtragwerks

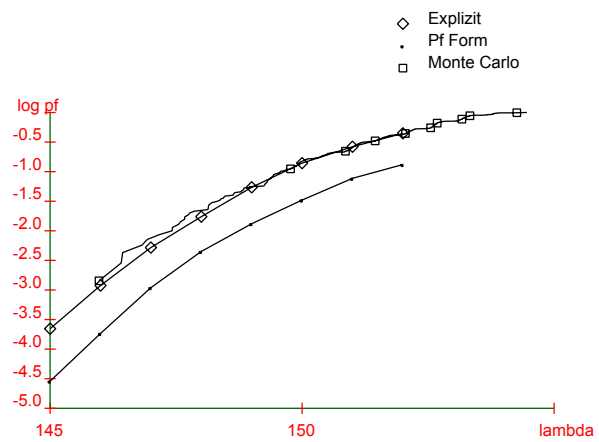


Abbildung 5.15:  $\lambda - p_f$  Beziehung für das Stabtragwerk

dargestellt.

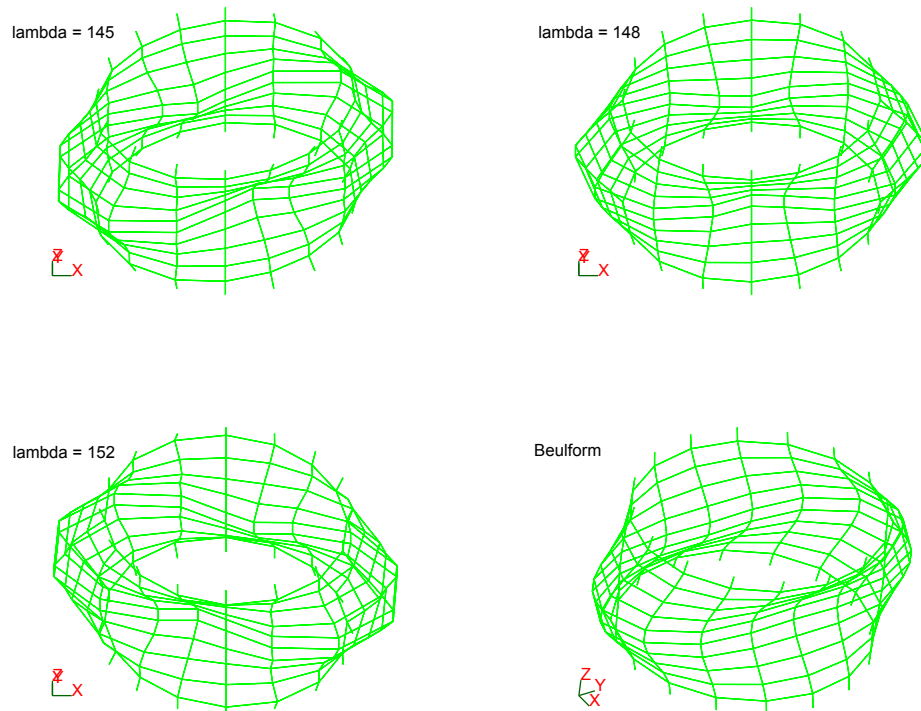


Abbildung 5.16: Imperfektionsform am Bemessungspunkt

Damit liegt nahe, nur die Singulärvektoren als Imperfektionsformen heranzuziehen (“Fall B”). Das System wird so mit nur zwei Zufallsvariablen beschrieben. Gemäß Kap. 2.2.5 wird das Zufallsfeld auf diese Imperfektionsformen projiziert. In fünf Suchrichtungen werden die Last-Imperfektionsbeziehungen bestimmt. Die Grenzzustände werden ermittelt und die Versagenswahrscheinlichkeit für mehrere Lastniveaus berechnet. Abb. 5.17 zeigt die Berechnungsergebnisse im Vergleich zum herkömmlichen Verfahren und zur direkten Monte Carlo Simulation. Zusätzlich ist die Versagenswahrscheinlichkeit für lediglich eine Zufallsvariable aufgetragen.

Die Versagenswahrscheinlichkeit für zwei Zufallsvariablen entspricht nahezu der Monte Carlo Simulation. Mit nur einer Zufallsvariable kann das Strukturverhalten noch nicht beschrieben werden. Die direkte Monte Carlo Simulation benötigte 72 Stunden, die Variante “Fall A” 39 Stunden, “Fall B” 3 Stunden Rechenzeit.

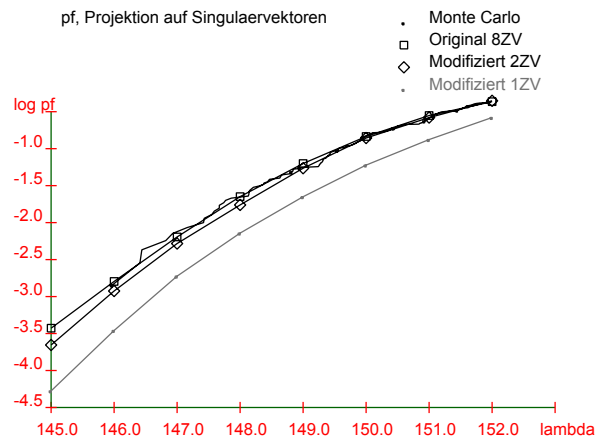


Abbildung 5.17:  $\lambda - p_f$  Beziehung für das Stabtragwerk bei Projektion des Zufallsfeldes auf die Singulärvektoren

### 5.3 Mit Stringern verstärkte Schale

Als drittes Beispiel wird eine mit Stringern verstärkte Schale unter axialer Belastung untersucht, vgl. Abb. 5.18. Die betrachtete Struktur wurde unter anderem in [6, 7, 8] behandelt.

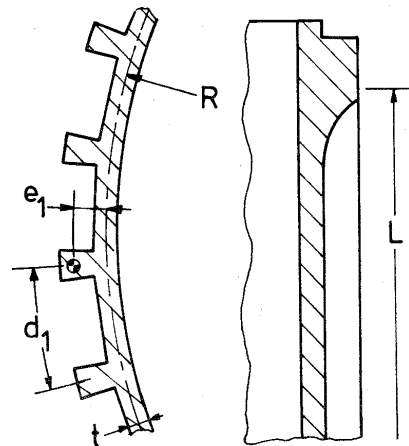
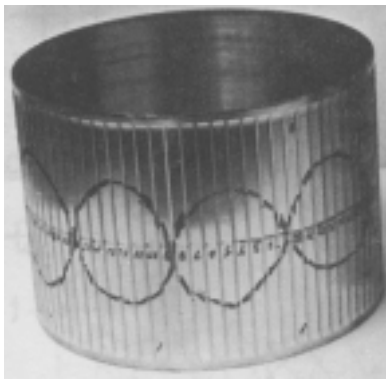


Abbildung 5.18: Geometrie und Abmessungen der Schale [5]

Die Struktur wird durch 4800 Finite Elemente und 1600 Knoten diskretisiert. Die Schalenstruktur wird mit dem in Kap. 4.2.1 beschriebenen Platten-Membranele-

$t$ [mm]	$A_1$ [mm <sup>2</sup> ]	$e_1$ [mm]	$d_1$ [mm]	$E$ [ $\frac{N}{mm^2}$ ]	$R$ [mm]	$L$ [mm]	$N_{Str}$ -	$P_{exp}$ [KN]
0.197	0.799	0.337	8.02	$6.895 * 10^4$	101.6	139.7	80	14.286

Tabelle 5.3: Abmessungen der Schale [5]

ment, die Stringer mit rechteckigen Balkenelementen modelliert. Die Balkenformulierung berücksichtigt dabei die Exzentrizität der Stringer. Als Randbedingungen wird eine Navierlagerung der Struktur zugrundegelegt [6, 7, 8]. Die Verschiebungsfreiheitsgrade bei  $z = 0$  sind gesperrt. Bei  $z = L$  sind vertikale Verschiebungen zugelassen.

### 5.3.1 Imperfektionsmodell

Für drei dieser stringerverstärkte Schalenstrukturen sind in den 70-er Jahren Imperfektionen und Beullasten gemessen worden [68]. Diese Strukturen haben gleiche Grundabmessungen, unterscheiden sich jedoch erheblich in Wand- und Stringerstärke. Die gemessenen Imperfektionen sind als Koeffizienten der folgenden Fourierreihe dargestellt [5]:

$$w(x,y) = t \sum_{i=0}^{14} A_{i0} \cos \frac{i\pi x}{L} + t \sum_{k=0}^9 \sum_{l=1}^{14} \cos \frac{k\pi x}{L} \left( A_{kl} \cos \frac{ly}{R} + B_{kl} \cos \frac{ly}{R} \right) \quad (5.13)$$

Bei Annahme von Homogenität und Ergozität der Imperfektionen ergibt sich die in Abb. 5.19 dargestellte Verteilung der Imperfektionsamplituden. Das Zufallsfeld der Imperfektionen wird normalverteilt mit einer Standardabweichung von  $7 * 10^{-5}m$  angenommen. Die Lagerungsbedingungen werden als deterministisch angesehen.

Da die Imperfektionen in Umfangsrichtung bei  $u = 2\pi$  voll korreliert sind, während die Korrelationsfunktion in Längsrichtung monoton abnehmen kann, wird eine orthotrope Korrelationsstruktur des Zufallsfeldes angenommen. Aus den gemessenen Imperfektionen ergibt sich das in Abb. 5.20 dargestellte Korrelationsmodell in Umfangsrichtung. In Längsrichtung wird ein linearer Verlauf mit Korrelationslänge  $l_H = L$  angenommen.

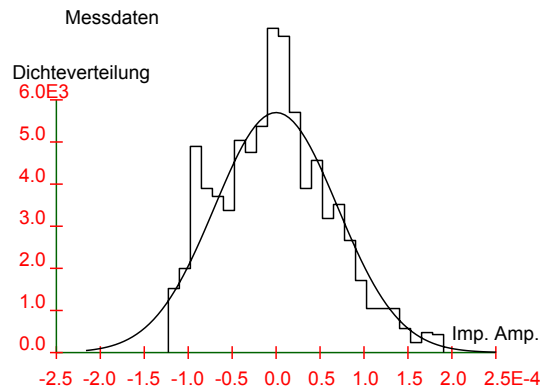


Abbildung 5.19: Verteilung der Imperfektionsamplituden aus Messdaten [5]

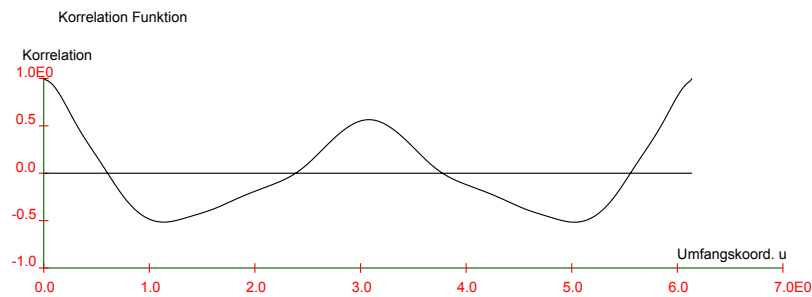


Abbildung 5.20: Korrelationsfunktion in Umfangsrichtung

### 5.3.2 Asymptotisches Stabilitätsverhalten

Mit Pfadverfolgung und Bisektion werden Stabilitätsberechnung am perfekten System durchgeführt. Bei  $\lambda = 217.3$  (bei  $\|\mathbf{P}\| = 80N$ ) tritt für die symmetrische Struktur unter axialer Belastung wieder eine *doppelte* Singularität auf. (In [6, 7] wird für Navierlagerung bei  $\lambda = 176.9$  eine einfache Singularität für die perfekte Struktur ermittelt.) Das Verhältnis des niedrigsten Eigenwerts am belasteten System zum unbelasteten System beträgt  $2.1 \cdot 10^{-7}$ . Die zugehörigen Beulformen zeigen jeweils 22 Halbwellen in Umfangsrichtung sowie 1 Vollwelle in Längsrichtung auf ([6] 20, 1). Die beiden Beulformen sind in der Form identisch, jedoch um  $\frac{\pi}{44}$  verdreht. Abb. 5.21 zeigt eine Beulform.

Die Singularität stellt eine Verzweigung dar. Folgende Nachbeulkoeffizienten (Gl.



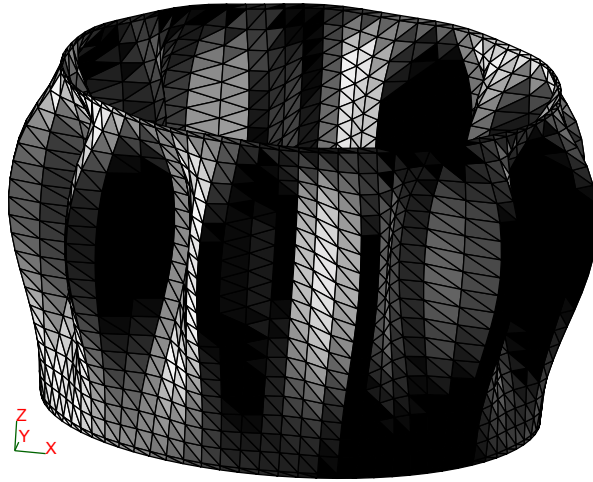


Abbildung 5.21: Beulform der verstärkten Schale

3.73 bis Gl. 3.75) werden bestimmt:

$$a_{ijk} = c_i = b_{12} = b_{21} = 0 \quad (5.14)$$

$$b_{11} = b_{22} = -0.000437 \frac{N}{m^2} \quad (5.15)$$

Die Verzweigung ist symmetrisch. Die Krümmungen der Gleichgewichtspfade wird mit folgenden Koeffizienten (s. Gl. 3.83, Gl. 3.84) beschrieben:

$$\begin{aligned} e_{1111} &= e_{2222} = 3 * 1.311 \frac{N}{m^4} \\ e_{1112} &= e_{1222} = e_{2111} = e_{2221} = 0 \\ e_{1121} &= e_{1211} = e_{2122} = e_{2212} = 2 * 1.311 \frac{N}{m^4} \\ e_{1122} &= e_{1212} = e_{1221} = e_{2112} = e_{2121} = e_{2211} = 1.311 \frac{N}{m^4} \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} f_{1111} &= f_{2222} = -1.254 \frac{N}{m^4} \\ f_{1122} &= f_{2211} = -0.555 \frac{N}{m^4} \\ f_{1212} &= f_{1221} = e_{1211} = e_{2121} = -0.349 \frac{N}{m^4} \\ f_{1112} &= f_{1121} = f_{1211} = f_{1222} = f_{2111} = f_{2122} = f_{2212} = f_{2221} = 0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Wieder ergibt die Nachbeulanalyse für eine einfache Verzweigung einen stabilen Verzweigungspunkt!

### 5.3.3 Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit

Die Berechnungen am imperfekten System werden mit dem in Kap. 3.7.1 beschriebenen Indifferenzenverfahren durchgeführt. Hierbei werden Terme 2. Ordnung berücksichtigt. Damit muß ein quadratisches Eigenwertproblem gelöst werden. Zur Berechnung des kritischen Punktes müssen neben dem Ausgangszustand 2 weitere Gleichgewichtspunkte auf dem Primärpfad bestimmt werden. Das verwendete Verfahren erweist sich gegenüber Pfadverfolgungs- und Bisektionsverfahren zur Bestimmung des kritischen Punktes in der Rechenzeit um den Faktor 10 günstiger. Die ermittelte Last stellt eine Näherungslösung dar. Für die perfekte Struktur wird die kritische Last im Vergleich zu den Berechnungen mit Pfadverfolgungstechniken auf 0.1 % Genauigkeit ermittelt. Für imperfekte Systeme ergaben sich bei 20 Realisationen des Zufallsfeldes eine mittlere Abweichung von 3.2 % gegenüber den Berechnungen mit Pfadverfolgung und Bisektion. Für ein lineares Eigenwertproblem ergibt sich bereits eine mittlere Abweichung von 8.5 %. Die Berücksichtigung von Termen 3. und 4. Ordnung verbessert die Lösung nicht wesentlich. Die in Tab. 5.4 aufgeführten Parameter zur Lösung des quadratischen Eigenwertproblems wurden bei sämtlichen Berechnungen dieses Kapitels verwendet.

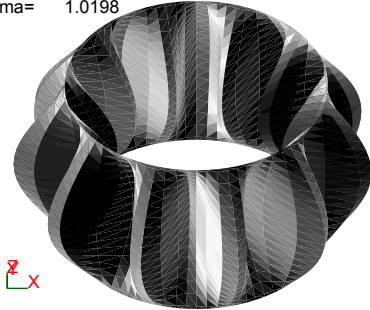
Toleranzgrenze für NEWTON - Iteration	$1 * 10^{-4} N$
Toleranzgrenze zur Lösung des generalisierten Eigenwertproblems für lineare Beulanalyse	$1 * 10^{-3}$
Dimension des Unterraums zur Lösung des quadratischen Eigenwertproblems	15
Toleranzgrenze zur Berechnung des quadratischen Eigenwertproblems	$1 * 10^{-2}$

Tabelle 5.4: Parameter für die Berechnung der Beullast

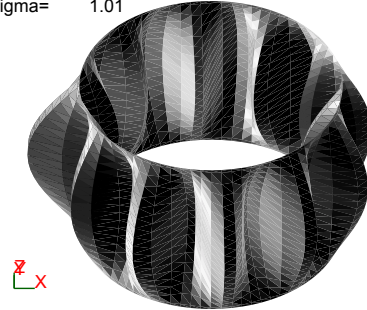
Als Referenzlösung für die Versagenswahrscheinlichkeit wurde eine direkte Monte Carlo Simulation mit 250 Realisationen unter Berücksichtigung von 300 Imper-

fektionsformen durchgeführt ( $Q = 1.00$ , vgl. Gl. 2.18). Ein Vorgehen analog Kap. 5.2 führt mit der asymptotischen Sensitivitätsanalyse auf die Definition eines Unterraumes. Die nach dieser Studie wichtigsten vier Formen sind in Abb. 5.22 dargestellt. Jede dieser Formen zeigt eine große Anzahl Halbwellen in Umfangsrich-

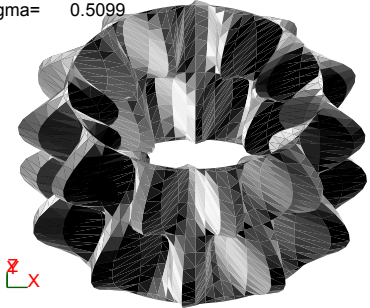
52. Imperfektionsform  
sigma= 1.0198



53. Imperfektionsform  
sigma= 1.01



126. Imperfektionsform  
sigma= 0.5099



131. Imperfektionsform  
sigma= 0.5

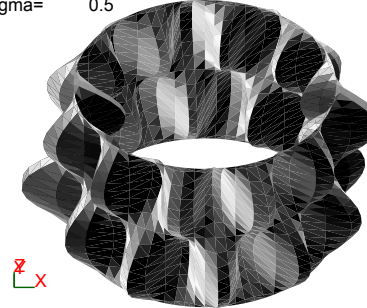


Abbildung 5.22: Imperfektionsformen der mit Stringern verstärkten Schale nach den asymptotischen Gesetzen

tung. Die differentielle Aussage mit asymptotischen Gesetzen läßt auf entscheidende Imperfektionsformen schließen, die starke Anteile in den Singulärvektoren aufweisen. Die nichtlinearen Berechnungen der Last-Imperfektionsbeziehung ergaben, daß mit dem auf diese Weise definierte Unterraum das reale Strukturverhalten *nicht* abgebildet werden kann! Deshalb wird im folgenden untersucht, inwieweit sich das Strukturverhalten mit  $N$  Imperfektionsformen, die aus Eigenvektoren der Kovarianzmatrix bzw. der Steifigkeitsmatrix ausgewählt werden, beschreiben lassen. Die folgenden Kriterien wurden zur Definition des Unterraums herangezogen.

- $N = 10$ , Wahl der Imperpektionsformen nach Ergebnissen der asymptotischen Imperpektionsgesetze (“Fall A”).
- $N = 10$ , Eigenvektoren zu den niedrigsten Eigenwerten der Steifigkeitsmatrix im kritischen Punkt des perfekten Systems (“Fall B”).
- $N = 10$ , Eigenvektoren zu den größten Eigenwerten der Kovarianzmatrix (“Fall C”).
- $N = 10$ , ähnlich “Fall C”, jedoch wurde eine nichtlineare Sensitivitätsstudie für die Eigenvektoren zu den größten 50 Eigenwerten der Kovarianzmatrix durchgeführt. Die wichtigsten  $N$  Imperpektionsformen wurden ausgewählt (“Fall D”).
- $N = 10$ , ähnlich “Fall D”, jedoch wurde eine nichtlineare Sensitivitätsstudie für die Eigenvektoren zu den größten 100 Eigenwerten der Kovarianzmatrix durchgeführt. Die wichtigsten  $N$  Imperpektionsformen wurden ausgewählt (“Fall E”).
- Analog “Fall C”, jedoch mit  $N = 50$  (“Fall F”) und  $N = 100$  (“Fall G”).

Das Zufallsfeld wurde auf diese Imperpektionsformen projiziert. Anschließend wurde eine direkte Monte Carlo Simulation mit 100 bis 150 Realisationen durchgeführt. Abb. 5.23 zeigt die Ergebnisse der Berechnungen im Vergleich zur Monte Carlo Simulation.

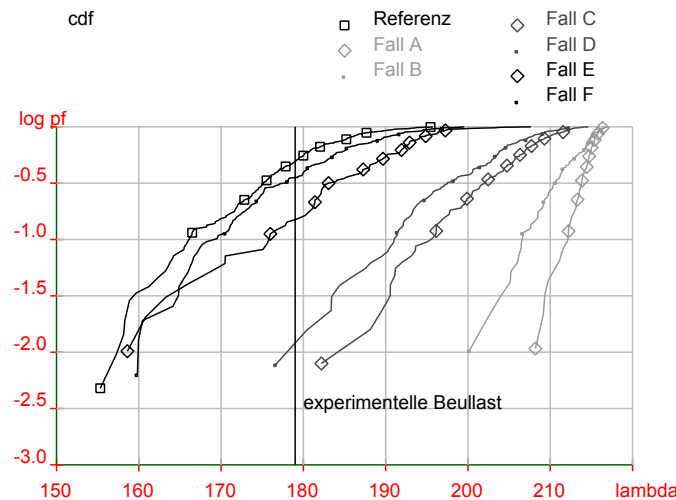


Abbildung 5.23:  $\lambda - p_f$  Beziehung für die mit Stringern verstärkte Schale

“Resonanz”erscheinungen einer Imperpektionsform in der Beulform (vgl. Kap. 5.1 und Kap. 5.2) treten für dieses Beispiel nicht auf. Erst mit 100 Zufallsvariablen

(“Fall F”) wird das Strukturverhalten erfaßt. Damit ist eine probabilistische Beschreibung dieses Problems mit dem in Kap. 2.3 beschriebenen Interaktionsmodell im betrachteten Wahrscheinlichkeitsbereich nicht möglich. Die Ergebnisse mit 50 Zufallsvariablen (“Fall E”) deuten darauf hin, daß für niedrige Wahrscheinlichkeitsniveaus hauptsächlich die Amplituden der Imperfektionsformen von entscheidender Bedeutung sind.

In [8] wird für diese Struktur die Versagenswahrscheinlichkeit nach der *first order second moment* Methode [69] bestimmt. Dieses Verfahren hat den entscheidenden Nachteil, daß der ermittelte Sicherheitsindex von der speziellen mathematischen Formulierung des Grenzzustandes abhängig ist. Die Ursache hierfür ist, daß die Grenzzustandsfunktion um einen Punkt in eine TAYLOR-Reihe entwickelt wird, der nicht auf  $g(x) = 0$  liegt. Damit können die berechneten Wahrscheinlichkeiten sehr ungenau werden [69]. In [8] stellen die Fourierkoeffizienten aus Gl. 5.13 die zufälligen Größen dar. Diese Vorgehensweise hat zwar den Vorteil, daß keine Annahmen bezüglich der Homogenität des Zufallsfeldes getroffen werden müssen, jedoch wird eine große Anzahl von Messungen benötigt um die Kovarianzen der Zufallsvariablen statistisch gesichert zu bestimmen (3 Realisationen, wie in [8] sind hierfür zu wenig). Ein direkter Zusammenhang zwischen Qualitätsmaßstäben des Fertigungsprozesses und den Parametern des probabilistischen Modells für die geometrischen Imperfektionen gelingt mit dieser Darstellung des Zufallsfeldes nicht. Für die Berechnung in [8] werden aus den 290 gespeicherten Fourierkoeffizienten entscheidende 7 Koeffizienten über Sensitivitätsuntersuchungen mit Imperfektionsbeziehungen für eine asymmetrische Einfachverzweigung ausgewählt. Die doppelt symmetrische Struktur unter einachsiger Belastung stellt jedoch eine symmetrische Zweifachverzweigung dar. Dieses Kapitel zeigte weiterhin, daß differentielle Aussagen bezüglich des Imperfektionsverhaltens am kritischen Punkt der perfekten Struktur zu falschen Ergebnissen führen können, wenn die Beulform im Imperfektionsfeld einen geringen Einfluß hat. In Anbetracht der erwähnten Unterschiede in den Berechnungsmodellen ist der folgende Vergleich der Berechnungsergebnisse nur bedingt statthaft: In [8] wird für eine Versagenswahrscheinlichkeit von 0.98 ein Lastfaktor  $\lambda_{0.98} = 129$  ermittelt, wogegen in der eigenen Berechnung  $\lambda_{0.98} = 160$  erzielt wird. Interessanterweise beträgt jedoch der sog. *knockdown* Faktor für beide Berechnungen  $\frac{\lambda_{0.98}}{\lambda_{perfekt}} = 0.73$ .

## 5.4 Diskussion der Beispiele

In Tab 5.5 sind die Ergebnisse der Berechnungen dieses Kapitels zusammengefaßt.

Die direkten Verfahren zur Berechnung des kritischen Punktes (vgl. Kap. 3.7.3) erwiesen sich für die untersuchte Einfachverzweigung als stabil. Der kritische Punkt konnte für das perfekte und die imperfekten Systeme bereits nach wenigen Iterationen ( $N < 5$ ) sehr genau bestimmt werden. Für Mehrfachverzweigungen (Kap. 5.2 und Kap. 5.3) traten Konvergenzprobleme auf. Der kritische Punkt wurde in diesen Beispielen mit Pfadverfolgung und Bisektion bestimmt. Als Alternative bietet sich das Indifferenzenverfahren an (s. Kap. 3.7.1). Für Probleme mit näherungsweise linearem Vorbeulverhalten kann bereits mit Berücksichtigung von Termen 2. Ordnung der kritische Punkt für das perfekte System sehr genau bestimmt werden. Für imperfekte Strukturen stellt die so ermittelte Lösung im Vergleich zur linearen Beulanalyse eine wesentlich bessere Näherung dar. Allerdings können elasto-plastische Effekte mit Indifferenzenverfahren nicht berücksichtigt werden.

Sofern eine begrenzte Anzahl entscheidender Zufallsvariablen identifiziert werden kann, ist mit dem zur Anwendung gebrachten Interaktionsmodell der Zufallsvariablen ein erheblicher Rechenzeitgewinn bei der Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit gegenüber dem direkten Monte Carlo Verfahren möglich. Insbesondere können noch sehr kleine Wahrscheinlichkeitsniveaus erfaßt werden, die mit einer direkten Monte Carlo Simulation aus Rechenzeitgründen nicht mehr bestimmt werden können.

Für die Einfachverzweigung “Bogen Fall A” konnte das Strukturverhalten mit asymptotischen Gesetzen nahezu exakt beschrieben werden. Für solche Fälle kann eine Beziehung zwischen Versagenswahrscheinlichkeit und Last auf semi-analytische Weise angegeben werden. Damit sind nochmals starke Rechenzeitgewinne möglich. Die geringen Änderungen in den Randbedingungen des Zufallsfeldes bei Variante “Bogen Fall B” führten dazu, daß das Strukturverhalten durch die asymptotische Formulierung nicht exakt wiedergegeben werden konnte. Die Behandlung von Mehrfachverzweigungen erweist sich als wesentlich aufwendiger. Bereits geringfügige Asymmetrien in der Vernetzung führen unter Umständen bei der Berechnung der kritischen Punkte nicht auf eine mehrfache sondern auf eine einfache Singularität und damit zu einer falschen Klassifizierung des Stabilitätsproblems. Die Form der Imperfektionsgesetze für Mehrfachverzweigungen ist in der Literatur nicht einheitlich dargestellt (s. Kap. 3.5). Die Anzahl der zu berechnenden Koeffizienten steigt mit der Vielfachheit der Singularität schnell an.

	Bogen Fall A, B	Stabtragwerk Fall A, B	Schalenstruktur Fall A, B, C, D, E, F
# Freiheitsgrade	371	996	9440
# Knoten	125	200	1600
Materialgesetz	elastisch	elasto-plastisch	elastisch
Berechnung des kritischen Punktes	dir. Methode	Pfadverfolgung	Pfadverfolgung, quadrat. Eigenwertproblem
Typ der Verzweigung des perf. Systems	sym. 1-fach	sym. 2-fach	sym. 2-fach
Beulform, # $\frac{1}{2}$ -wellen in Umfangs- und Längsrichtung	2, -	4, 1	22, 1
Bestimmung der $\lambda - p_f$ Bez. mit asymp. Gesetzen	A: ja B: bedingt	nein	nein
Identifik. der wichtigsten ZV mit asymp. Gesetzen	ja	ja	nein
Bemessungspunkt	A: Beulform B: Beulform	A: Beulform B: Beulform	<i>nicht</i> die Beulform
Dimension des Unterraumes	A: 1 B: 10	A: 8 B: 2	A, B, C, D: 10 E: 50 F: 100
Beschreibung des Strukturverhaltens im Unterraum	A: ja B: ja	A: ja B: ja	A,B,C, D: nein E: bedingt F: ja
Anteil der Singulärvektoren am Zufallsfeld	A: $Q = 0.17$ B: $Q = 0.16$	$Q = 0.33$	$Q = 0.0034$
Verfahren zur Bestimmung von $p_f$	Interaktion, <i>Adap. Samp.</i>	Interaktion, <i>Adap. Samp.</i>	direkte MCS
Rechenzeitvergleich $\left( \frac{t_{\text{Interaktion}}}{t_{\text{MC direkt}}} \right)$	A: $4.6 \cdot 10^{-4}$ B: 0.015	A: 0.56 B: 0.04	-

Tabelle 5.5: Zusammenfassung der Berechnungsergebnisse

Insbesondere die 2. Ableitungen der Steifigkeitsmatrix bedürfen bei einer numerischen Differentiation einer sorgfältigen Sensitivitätsstudie bezüglich des Differentiationsparameters. Prinzipiell mögliche Plastifizierungseffekte können durch die asymptotischen Gesetze nicht erfaßt werden (s. Kap. 5.2.1). Das Beispiel der mit Stringern verstärkten Schale machte deutlich, daß mit den Imperfektionsgesetzen nicht immer eine korrekte Identifizierung der wichtigsten Zufallsvariablen möglich ist. Eine probabilistische Aussage, die lediglich auf asymptotischen Ableitungen beruht, wie in [63] vorgeschlagen, kann daher nur für einige Beispiele zu korrekten Ergebnissen führen.

Offenbar kommt dem Anteil der Beulformen am Zufallsfeld (s. Tab. 5.5) eine entscheidende Bedeutung zu. Wenn die Singulärvektoren im Zufallsfeld *ausreichend* stark repräsentiert sind, üben Imperfektionsformen in der Beulform - ähnlich Anregungen in den Eigenfrequenzen bei Problemen der Dynamik- “Resonanz”effekte aus. Die Imperfektionsform am Bemessungspunkt entspricht unabhängig vom Lastniveau gerade der Beulform. Die Beulform stellt damit die Imperfektionsform dar, die den größten Beitrag zur Versagenswahrscheinlichkeit liefert. Für solche Fälle (Kap. 5.1:  $Q = 0.16$  und Kap. 5.2:  $Q = 0.33$ ) gelingt es, das stochastische Problem durch Projektion des Zufallsfeldes auf die Beulformen, auf wenige Zufallsvariablen zu reduzieren. Mit schwachem bzw. nahezu vernachlässigbarem Anteil der Beulformen am Zufallsfeld (vgl. Kap 5.3:  $Q = 0.0033$ ) treten diese “Resonanz”erscheinungen bei den nichtlinearen Rechnungen am imperfekten System nicht auf. Eine Identifikation von *wenigen* entscheidenden Zufallsvariablen erscheint für solche Fälle nicht möglich. Die Struktur zeigt im betrachteten Wahrscheinlichkeitsbereich ein “*breitbandiges*” Verhalten. Die differentielle Aussage im kritischen Punkt läßt fälschlicherweise auf Imperfektionsformen mit starkem Anteil in der Beulform schließen.

In zukünftigen Berechnungen muß untersucht werden, ab welchem Anteil der Beulform im Imperfektionsfeld die erwähnten “Resonanz”erscheinungen auftreten. Weiter wäre zu überprüfen, ob für Fälle bei denen viele Zufallsvariable gleichermaßen Einfluß auf das Strukturverhalten haben ein *directional sampling* Verfahren [13] zur Bestimmung der  $\lambda - p_f$  Beziehung sinnvoll angewendet werden könnte.



# Kapitel 6

## Zusammenfassung

Geometrische Imperfektionen haben bei Stabilitätsproblemen häufig einen großen Einfluß auf das Tragverhalten. Wenn die klassischen Stabilitätstheorie zusammen mit empirisch bestimmten Abminderungsfaktoren für die Bemessung herangezogen wird, bleiben u.a. Fertigungstechniken und Toleranzen unberücksichtigt. Eine Bemessung im Rahmen der Zuverlässigkeitstheorie ermöglicht, Qualitätsmaßstäbe im probabilistischen Modell für die Imperfektionen zu berücksichtigen. Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit durch direkte Monte Carlo-Simulation ist stets möglich, erweist sich jedoch als numerisch sehr aufwendig. In dieser Arbeit wird eine Methode zur Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit für geometrisch imperfekte Strukturen diskutiert, die auf einem Interaktionsmodell für die wichtigsten Zufallsvariablen basiert. Dazu muß das stochastische Problem in einem geeigneten Unterraum dargestellt werden.

Die Berechnungen bauen auf einem mechanischen und einem probabilistischen Modell auf. Die Imperfektionen werden über homogene ergodische Zufallsfelder abgebildet, wobei deterministische Bedingungen an Auflagern berücksichtigt werden können. Ergodizität und Homogenität stellen dabei zweifellos starke Vereinfachungen dar, die im Einzelfall zu diskutieren sind. Durch eine Eigenwertzerlegung der Kovarianzmatrix wird das Zufallsfeld als Überlagerung von deterministischen Imperfektionsformen mit zufällig verteilten Amplituden verstanden. Somit werden Imperfektionsformen, denen ein probabilistisches Gewicht zugeordnet ist, für strukturmechanische Untersuchungen auf nicht heuristische Weise formuliert. Den Ausgangspunkt für die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit stellt eine approximative Beschreibung des Grenzzustandes mit einem Interaktionsmodell für die wichtigsten Zufallsvariablen dar. Für eine Auswahl der ent-

scheidenden Imperfektionsformen werden die KOITERschen Imperfektionsgesetze für Ein- und Mehrfachverzweigungen diskutiert. Mit dem Bemessungspunkt der Grenzzustandsfunktion kann auf die Imperfektionsformen mit dem größten probabilistischen Gewicht geschlossen werden.

In den Beispielen zeigte sich, daß die Imperfektionsform am Bemessungspunkt für die betrachteten Lastniveaus gerade der Beulform entspricht, wenn diese in *ausreichendem* Maße im Imperfektionsfeld enthalten ist. Mit einer Projektion des Zufallsfeldes auf Imperfektionsformen in den Singulärvektoren kann eine probabilistische Beschreibung des Strukturverhalten bereits mit sehr wenigen Zufallsvariablen erfolgen. Die Beispiele machen ferner deutlich, daß die probabilistische Analyse auf Grenzzuständen aufbauen muß, die im Regelfall mit nichtlinearen Berechnungen des Last-Imperfektionsverhaltens bestimmt worden sind. Nur für ausgewählte Beispiele führen Berechnungen, die nur auf den asymptotischen Gesetzen beruhen, zu korrekten Ergebnissen.

Die Berechnung der Versagenswahrscheinlichkeit gestaltet sich wesentlich aufwendiger, wenn die Beulform im Imperfektionsfeld einen untergeordneten Beitrag liefert. Dies gilt insbesondere für dünnwandige Schalenstrukturen. Die Beulformen sind für diese Problemstellung oft sehr hochwellig, ihr Anteil am Zufallsfeld ist sehr gering. In solchen Fällen sind die erwähnten "Resonanz"erscheinungen nicht zu beobachten. Eine probabilistische Beschreibung des Strukturverhaltens gelingt nur durch verhältnismäßig viele Zufallsvariablen.

Die Bemessung einer Struktur nach Zuverlässigkeitskriterien orientiert sich an einer Versagenswahrscheinlichkeit, die nicht überschritten werden darf. Im Entwurfsprozeß werden Strukturparameter (z.B. Blechstärke), Materialparameter oder Fertigungsverfahren solange modifiziert, bis das geforderte Zuverlässigkeitsmaß erfüllt ist. Dabei werden wiederholt Zuverlässigkeitsprobleme gelöst. Dies gelingt dann auf numerisch effiziente Weise, wenn sich die probabilistische Problemstellung auf wenige Zufallsvariablen reduzieren läßt.

# Literaturverzeichnis

- [1] Andelfinger U.: *Untersuchung zur Zuverlässigkeit hybrid-gemischter Finite Elemente für Flächentragwerke*, Dissertation Bericht 91-13, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1991
- [2] Anderson E. et al.: *LAPACK users' guide*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1992
- [3] Allman D.J.: "A Compatible Triangular Element Including Vertex Rotations for Plane Elasticity Analysis", *Computers and Structures* Vol. 19, No.1-2 pp 1-8, 1984
- [4] Arbocz J.: "The Imperfection Data Bank, a Mean to Obtain Realistic Buckling Loads", in Ramm E. (ed): *Buckling of Shells, Proceedings of a State of the Art Colloquium*, Universität Stuttgart, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982
- [5] Arbocz J., Abramovich H. : *The Imperfection Data Bank at the Delft University of Technology- Part I*, Delft University of Technology, Department of Aerospace Engineering, Delft, 1979
- [6] Arbocz J., Babcock C.D: "Computerized Stability Analysis Using Measured Imperfections", *Proceedings of 12th Congress of the International Council of Aeronautical Sciences*, Munich, Oct. 12-17, Germany, 1980
- [7] Arbocz J.: "Collapse Load Calculation for Axially Compressed Imperfect Stringer Stiffened Shells", *Proceedings of 25th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, Palm Springs, May 14-16, USA, 1984
- [8] Arbocz J., Hol M.A.M.: "Collapse of Axially Compressed Cylindrical Shells with Random Imperfections", *Thin-Walled Structures*, Vol. 23, pp 131-158, Elsevier Science Limited, Great Britain, 1995

- [9] Bathe K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*, Springer-Verlag, Berlin 1986
- [10] Batoz L.-L., Nathe K.J, Lee W.H.: "A study of Three Node Triangular Plate Bending Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.* , Vol. 15, 1771-1812, 1980
- [11] Bergan P.G.: "Finite Elements Based on Energy Orthogonal Functions", *Int. J. Num. Meth. Engng.* , Vol. 15, pp 1541-1555, 1980
- [12] Bergan P.G., Felippa C.A.: "A triangular membrane Element with rotational degrees of freedom", *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg.* , Vol. 50, pp 25-69, 1985
- [13] Bjerager P.: "Probability Integration by Directional Simulation", *J. Engng. Mech.*, Vol. 114, No. 8, 1998
- [14] Bourgund U., Bucher C.G.: *Importance Sampling Procedures Using Design Points (ISPUD) - A User's Manual*, Bericht No. 8 - 86, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1986
- [15] Brendel B.: *Zur geometrisch nichtlinearen Elastostabilität*, Dissertation Bericht 79-1, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1979
- [16] Brenner C.E.: *Stochastic Finite Element Methods (Literature Review)*, Interner Bericht No. 35-91, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1991
- [17] Brenner C.E.: *Ein Beitrag zur Zuverlässigkeitsanalyse von Strukturen unter Berücksichtigung von Systemuntersuchungen mit Hilfe der Methode der Stochastischen Finite Elemente*, Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1995
- [18] Bronstein I.N., Semendjajew K.A.: *Taschenbuch der Mathematik*, BSB B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, Verlag Nauka, Moskau, 1983
- [19] Bucher C., Schorling Y. : *SLang - the Structural Language Version 2.4*, Programmdokumentation, Institut für Strukturmechanik, HAB Weimar- Universität, Weimar Januar, 1996
- [20] Bucher C., Schorling Y., Wall W.: "SLang - the Structural Language, a tool for computational stochastic structural analysis", *Proceedings of 10th ASCE Eng.Mech.Conf*, Boulder, CO, 21-24 Mai, pp 1123-1126, 1995
- [21] Bucher C.G.: "Adaptive Sampling - An Iterative Fast Monte Carlo Procedure.", *Struct. Safety*, Vol. 5, pp 119-126, 1988

- [22] Bucher C.G., Nienstedt J., Ouypornprasert W.: *Adaptive Strategies in IS-PUD V 3.0*, Bericht No. 25-89, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1989
- [23] Bucher C.G.: *Geometrische Nichtlinearität*, Private Notizen, Weimar, Jan. 1995
- [24] Bucher C.G.: *Ansatzfunktionen für Plattenbiegeelemente*, Private Notizen, Innsbruck, Jan. 1994
- [25] Budiansky B.: "Theory of Buckling and Post-Buckling of Elastic Structures", *Adv. Appl. Mech.*, Vol. 14, pp 2-64, 1974
- [26] Bushnell D.: *Computerized buckling analysis of shells*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Boston, Lancaster, 1985
- [27] Cook R.D.: "Four Node Flat Shell Element: Drilling Degrees of Freedom, Membrane Bending Coupling Warped Geometry and Behavior", *Computers and Structures*, Vol. 50, No. pp 549-555, 1994
- [28] Deml M., Wunderlich W.: "The Buckling Strength of Imperfection Sensitive Shells - A Direct Approach", to appear *Proceedings of the 19th International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM)*, August 25-31, Kyoto, Japan, 1996
- [29] Deodatis G.: "Stochastic FEM Sensitivity Analysis of Nonlinear Dynamic Problems", *Prob. Engng. Mech.*, Vol. 4, No. 3, pp 135-141, 1989
- [30] Der Kiureghian A., Ke J.-B.: "The Stochastic Finite Element Method in Structural Reliability", *Prob. Engng. Mech.*, Vol. 3, No. 2, pp 83-91, 1988
- [31] Ditlevsen O.: "Random Field Interpolation Between Point by Point Measures Properties", *Proceedings of 1. Int. Conference on Computational Stochastic Mechanics*, Corfu, Greece, pp 801-812, 1991
- [32] Donnel L.H., Wan C.C.: "Effect of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression", *Journal of Applied Mechanics*, Vol 17, pp 73-83, 1950
- [33] Fenton A.G., Vanmarcke E.H.: "Simulation of Random Fields via Local Average Subdivision.", *J. Engng. Mech.*, Vol. 116, No. 8, 1990

- [34] Fish J., Belytschko T.: "Stabilized Rapidly Convergent 18-Degrees of Freedom Flat Shell Triangular Element", *Comp. Meths. Appl. Mech. Engrg*, Vol. 33, pp 149-162, 1992
- [35] Ghanem R.G., Spanos P.D.: *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, Springer Verlag, New York, 1991
- [36] Green A.E., Zerna W.: *Theoretical Elasticity*, 2nd Edn., Clarendon Press, Oxford, 1968
- [37] Heiland U., Osterrieder P., Werner F.: "Optimierung der Demontage und Montage von stählernen Eisenbahnbrücken", *Tagungsheft zur 6. Fachtagung Baustatik Baupraxis*, Weimar 7.-8.März 1996, Bauhaus-Universität Weimar, Weimar 1996
- [38] Hisada T., Nakagiri S.: "Stochastic Finite Element Method Developed for Structural Safety and Reliability", *Proceedings of Third Int. Conf. on Struct. Safety and Reliability*, Trondheim, Norway, pp 409-417, 1981
- [39] Ho D.: "The Influence of Imperfections on Systems with Coincident Buckling Loads", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 7, pp 311-321, 1972
- [40] Ho D.: "Buckling Loads of Non-Linear Systems with Multiple Eigenvalues", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 10, pp 1315-1330, 1974
- [41] Hutchinson J. W.: "Plastic Buckling", *Adv. Apl. Mech.*, Vol. 14, pp 67 -143, 1974
- [42] Johns K.C.: "Imperfection Sensitivity of Coincident Buckling Systems", *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol. 9, pp 15-28, 1974
- [43] Kameda H., Morikawa H.: "Conditional Stochastic Processes for Conditional Random Fields", *J. Engng. Mech.*, Vol. 120, No.4 pg. 855-875, 1994
- [44] Li C.C., Der Kiureghian A.: "An Optimal Discretization of Random Fields." *J. Engng. Mech.*, Vol. 119, No. 6, pp 1136-1154, 1993
- [45] Liu P.L., Der Kiureghian A.: "Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances.", *Prob. Engng. Mech.*, Vol. 1, No. 2, pp 105-112, 1986
- [46] Liu P.-L., Der Kiureghian A.: "Reliability of Geometrically Nonlinear Structures." in Spanos, P.D. (ed): "Probabilistic Methods in Civil Engineering."

- Proceedings of the 5th ASCE Speciality Conference*, Blacksburg, Va., May 25-27, pp 164-168, 1988
- [47] Liu W.K., Belytschko T., Mani A.: "Random Field Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 23, 1831-1845, 1986
  - [48] Liu W.K., Belytschko T.B., Besterfield G.H.: "Probabilistic Finite Element Method." in Liu, W.K.; Belytschko, T. (eds.): *Computational Mechanics of Probabilistic and Reliability Analysis*, Elmepress International, Lausanne, pp 115-140, 1989
  - [49] Madsen H.O., Krenk S., Lind N.C.: *Methods of Structural Safety*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1986
  - [50] Menkenhagen J., Thierauf G.: "An Analytical Method for an Element Invariant Automatic Generation of Degrees of Freedom", *Computers and Structures* Vol. 41, No.3 pp 483-487, 1991
  - [51] Nataf A.: "Détermination des distributions de probabilités dont les marges sont données.", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 225, pp 42-43, 1962
  - [52] Oden J.T. *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, New York, London, John Wiley and Sons, 1976
  - [53] Ouypornprasert W.: *Accurate Structural Reliability Analysis Utilizing Efficient Integration Methods*, Dissertation, Fakultät für Bauingenieurwesen und Architektur, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1988
  - [54] Ouypornprasert W., Bucher C.G. "An Efficient Scheme to Determine Response Functions for Reliability Analyses.", *Interner Arbeitsbericht* Nr. 30-88, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, Innsbruck, Österreich, 1988
  - [55] Pawlak T.P., Yunus S.M., Cook R.D.: "Solid Elements with Rotational Degrees of Freedom: PartII- Tetrahedon Elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 31, 593-610, 1991
  - [56] Petersen C: *Statik und Stabilität der Baukonstruktionen*, Vieweg, Wiesbaden 1982
  - [57] Pradlwarter H.J. *Beitrag zur Datenverarbeitung großer globaler Matrizen in der Strukturmechanik*, Bericht Nr. 2-84, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck, 1984

- [58] Ramm E.: *Geometrisch nichtlineare Elastostatik und finite Elemente*, Habilitation, Bericht Nr. 76-2, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1976
- [59] Reitinger R.: *Stabilität und Optimierung imperfektionsempfindlicher Tragwerke*, Dissertation, Bericht Nr. 94-17, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1994
- [60] Rubinstein R.Y. *Simulation and the Monte Carlo Method*, John Wiley & Sons, New York, 1981
- [61] Sacharov A.S.: "Grundlagen der FEM und ihre Realisierung im PS Procnost", *Die Methode der Finiten Elemente in der Festkörpermechanik*, Autorenkollektiv, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1982
- [62] Salerno G., Casciaro R.: "Finite Element Asymptotic Analysis of Slender Elastic Structures: a Simple Approach", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 35, 1397-1426, 1992
- [63] Salerno G., Coletta G., Casciaro R.: "Attractive Post Critical Paths and Stochastic Imperfection Sensitivity of Nonlinear Elastic Structures within a FEM Context", *Proceedings ECCOMAS Conference 96*, John Wiley & Sons, Ltd., 1996
- [64] Schweizerhof K.H.: *Quasi-Newton Verfahren und Kurvenverfolgungsalgorithmen für die Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme in der Strukturmechanik*, Schriftenreihe, Heft 9, Institut für Baustatik, Universität Fridericiana Karlsruhe (TH), 1989
- [65] Schittkowski K.: "Theory, Implementation and Test of a Non-linear Programming Algorithm", *Proceedings Euromech-Colloquium on Optimization Methods in Structural Design at Univ. Siegen, 1982*, Bibliographisches Institut, Mannheim, pp 122 - 132, 1983
- [66] Shinozuka M., Deodatis G.: "Response Variability of Stochastic Finite Element Systems", *J. Engng. Mech.*, Vol. 114, No. 3, pp 499-519, 1988
- [67] Shinozuka M., Yamazaki F.: "Stochastic Finite Element Analysis: an Introduction.", in *Stochastic Structural Dynamics*, Elsevier Applied Science Publishers Ltd., pp 241-291, 1988
- [68] Singer J., Arbocz J., Babock C.D: "Buckling of Imperfect Stiffened Cylindrical Shells under Axial Compression", *AIAA Journal*, Vol. 9, No.1, 68-75, 1971



- [69] Spaethe G.: *Die Sicherheit tragender Baukonstruktionen*, Verlag für Bauwesen, Berlin, 1987
- [70] Stein E., Wagner W., Wriggers P.: “Grundlagen nichtlinearer Berechnungsverfahren in der Strukturmechanik”, in *Nichtlineare Berechnungen im konstruktiven Ingenieurbau*, ed. E. Stein, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989
- [71] Sze K. Y., Thierauf G.: “Hybrid Plane Quadrilateral Element with Corner Rotations”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 119, No.9, pp 2552-2572, 1994
- [72] Thompson J.M.T, Hunt G.W.: *Elastic Instability Phenomena*, John Wiley and Sons, Chicester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore, 1974
- [73] Vanmarcke E.: *Random Fields: Analysis and Synthesis*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1983
- [74] Vanmarcke E., Grigoriu M.: “Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams”, *J. Engng. Mech.*, Vol. 109, No. 5, pp 1203-1214, 1983
- [75] Wagenhuber W.: *Imperfektionssensitivität und rechnerischer Nachweis der Beulsicherheit dünner Schalen*, Bericht Nr. 89-59, Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, Braunschweig, 1989
- [76] Wagner W.: *Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode der Finiten Elemente*, Habilitationsschrift, Fachbereich Bauingenieur-und Vermessungswesen, Universität Hannover, 1990
- [77] Wittek U.: *Beitrag zum Tragverhalten der Strukturen bei endlicher Verformung unter besonderer Beachtung des Nachbeulverhaltens dünner Flächen-tragwerke*, Techn.-wiss. Mittlg. Nr. 80-1, Institut für Konstruktiven Ingenieurbau, Ruhr Universität Bochum, 1980
- [78] Wriggers P., Simo J.C.: “A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points”, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 30, 155-176, 1990
- [79] Wriggers P., Wagner W., Miehe C.: “A Quadratically Convergent Procedure for the Calculation of Stability Points in Finite Element Analysis”, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 70, 329-347, 1988

- [80] Zhang J., Ellingwood B.: “Orthogonal Series Expansion of Random Fields in Reliability Analysis”, *Journal of Eng. Mechanics*, Vol.120, No. 12, pg. 2660-2677, 1994
- [81] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 1*, Fourth Edition, McGraw Hill, 1991
- [82] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.: *The Finite Element Method, Vol. 2*, Fourth Edition, McGraw Hill, 1991

# Anhang A

## Richtungsableitungen der Steifigkeitsmatrix

Für die asymptotische Nachbeulanalyse (Kap. 3.3) sowie für die asymptotische Imperfektionsanalyse (Kap. 3.4) werden höhere Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen nach den Verschiebungen benötigt. Diese Ableitungen können prinzipiell analytisch an der Elementformulierung gewonnen werden, vgl. [76]. Zweite Ableitungen der Gleichgewichtsbedingungen nach den Verschiebungen haben Tensoren dritter Stufe, dritte Ableitungen dann Tensoren vierter Stufe zur Folge.

Alternativ zu den analytischen Ableitungen kann eine numerische Differentiation der Steifigkeitsmatrix erfolgen. Diese Ableitungen sind nicht elementtypspezifisch, somit muß für asymptotische Untersuchungen am singulären Punkt keine Modifikation vom Quelltext des FE- Programms vorgenommen werden. Im Vergleich zur analytischen Lösung ist die numerische Differentiation mit einem Verlust an Rechengenauigkeit verbunden, der jedoch in Kauf genommen wird, nachdem die asymptotischen Analysen primär als Entscheidungshilfe zur Selektion von entscheidenden Imperfektionsformen verstanden werden.

Im Zuge der Analyse des asymptotischen Nachbeulverhaltens und der asymptotischen Imperfektionsempfindlichkeit treten Ausdrücke der Form  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$  sowie  $\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$  auf. Die Terme  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}}$  sowie  $\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2}$  stellen Tensoren dritter sowie vierter Stufe dar. In Indexschreibweise gilt dann, wenn die Steifigkeitsmatrix als partielle

Ableitung der Rückstellkräfte nach den Verschiebungen dargestellt wird:

$$\frac{\partial^2 R_j}{\partial u_k \partial u_i} q_k q_i = v_{1j} \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial^3 R_j}{\partial u_k \partial u_i \partial u_l} q_k q_i q_l = v_{2j} \quad (\text{A.2})$$

Die Ausdrücke  $\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$  sowie entsprechend  $\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2$  können demnach als vektorielle Größen interpretiert werden.

Die Vektoren  $\mathbf{q}_1$ ,  $\mathbf{q}_2$  sollen als beliebig und unabhängig von den Verschiebungen  $\mathbf{U}$  angenommen werden. Die Multiplikationsreihenfolge der Vektoren darf in diesem Fall vertauscht werden, s. Gl. A.1 und Gl. A.2:

Die numerische Differentiationsregel wird dann wie folgt abgeleitet [76]:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{K} \mathbf{q}_1) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left( \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 \right) \quad (\text{A.3})$$

Mit

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 = \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{G}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1))|_{\varepsilon=0}, \quad (\text{A.4})$$

folgt dann:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left( \frac{d}{d\varepsilon} (\mathbf{G}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1))|_{\varepsilon=0} \right) \quad (\text{A.5})$$

Ein Vertauschen der Differentiationsreihenfolge liefert:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 = \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{K}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1)|_{\varepsilon=0} \quad (\text{A.6})$$

Nach einem Grenzwertübergang  $\varepsilon \rightarrow 0$  ergibt sich als Näherung für die gesuchten Ausdrücke:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \approx \frac{1}{\varepsilon} (\mathbf{K}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 - \mathbf{K}(\mathbf{U}) \mathbf{q}_2) \quad (\text{A.7})$$

Eine genaueres Ergebnis wird erreicht wenn ein zentrales Differenzenverfahren angewendet wird:

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \approx \frac{1}{2\varepsilon} (\mathbf{K}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 - \mathbf{K}(\mathbf{U} - \varepsilon \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2) \quad (\text{A.8})$$

Für die nächst höhere Ableitung gilt entsprechend:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}^2} \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 = \frac{1}{\varepsilon^2} (\mathbf{K}(\mathbf{U} + \varepsilon \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2 - 2\mathbf{K}(\mathbf{U}) \mathbf{q}_2 + \mathbf{K}(\mathbf{U} - \varepsilon \mathbf{q}_1) \mathbf{q}_2) \quad (\text{A.9})$$

Für  $\mathbf{q}_2 = \Phi_1$  verschwindet an einer Singularität der Ausdruck  $\mathbf{K}\Phi_1$ . Die Berechnung der Richtungsableitungen erfordert ein erneutes Aufstellen der Steifigkeitsmatrix an der Stelle  $\mathbf{U} + \varepsilon \Phi_1$  sowie  $\mathbf{U} - \varepsilon \Phi_1$ . Der Parameter  $\varepsilon$  wird nach Untersuchungen in [59] in folgender Größenordnung gewählt:

$$10^{-8} < \varepsilon \frac{\|\mathbf{q}_1\|}{\|\mathbf{U}\|} < 10^{-3} \quad (\text{A.10})$$

## Anhang B

### Unterraum Iteration zur Eigenwertberechnung

Mit der LAPACK-Bibliothek steht ein leistungsfähiges Werkzeug für die Berechnung von Problemen der linearen Algebra für konventionelle Matrizenspeicherformen, d.h. als voll- bzw. dreiecksförmig abgespeicherte Matrizen, zur Verfügung. Probleme der Strukturmechanik stoßen mit diesen Speicherformen schnell an die Grenzen der verfügbaren Rechnerkapazität. Slang [19, 20] bietet dem Benutzer zusätzlich noch eine sog. kompakte Speicherform für die Systemmatrizen an, die lediglich Position und Wert der von Null verschiedenen Matrixelemente abspeichert. Für die im Regelfall nur schwach besetzten Strukturmatrizen ergeben sich so erhebliche Speichervorteile. Für die Lösung von generalisierten - sowie standard Eigenwertproblemen werden für diese Speicherform Eigenwertlöser zur Verfügung gestellt, die auf der Unterraum-Iteration [9] beruhen. An Hand dieser Methode lassen sich Näherungslösungen für die Eigenpaare auf iterative Weise gewinnen, die berechneten Eigenwerte stellen eine obere Schranke für die exakten Systemeigenwerte dar. Das Verfahren ist insbesondere dann sehr effektiv anzuwenden, wenn nur wenige ( $p$ , mit  $p \ll n$ ) Eigenpaare berechnet werden sollen und eine Systemmatrix bereits in faktorisierter Form vorliegt. Folgendes generalisiertes Eigenwertproblem soll gelöst werden:

$$\mathbf{A}\Phi = \Lambda(\mathbf{B}\Phi) \quad (\text{B.1})$$

Mit

$$\Phi^T \mathbf{A} \Phi = \Lambda \quad (\text{B.2})$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  werden als symmetrisch mit Dimension  $n * n$  vorausgesetzt, die resultierenden Eigenwerte sind somit stets reel [18]. Die Kondition der Matrix  $\mathbf{A}$  soll für deren Inversion als ausreichend gewährleistet sein. Die Matrix  $\mathbf{B}$  muß dabei nicht notwendigerweise positiv definit sein. Dieser Fall tritt insbesondere bei der Berechnung von kritischen Punkten mit dem Indifferenzenverfahren (Kap. 3.7.1) häufig auf. Das Standardeigenwertproblem

$$\mathbf{A}\Phi = \Lambda\Phi, \quad (\text{B.3})$$

ist mit  $\mathbf{B} = \mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$  stellt die Einheitsmatrix dar), als Sonderfall in Gl. B.1 enthalten und kann somit auf gleiche Weise gelöst werden.

Die Lösung des Eigenwertproblems gelingt dann wie folgt. Als erster Schritt wird folgendes Gleichungssystem formuliert,

$$\mathbf{A}\overline{\Phi}^{k+1} = \mathbf{B}\Phi^k \quad (\text{B.4})$$

daß nach  $\overline{\Phi}^{k+1}$  aufzulösen ist. Die hochgestellten Indizes kennzeichnen die Iterationsnummer. Für Iterationsbeginn ( $k = 0$ ) ist eine Ausgangsmatrix  $\Phi^0$  der Dimension  $p * n$  zur Verfügung zu stellen, die eine lineare Unabhängigkeit der Spalten gewährleistet. Sofern kein Anfangszustand, z.B. aus einer vorangegangenen Eigenwertlösung, zu Verfügung steht, werden die Matrixelemente gängigerweise mit gleichverteilten Zufallszahlen besetzt [9, 76]. Die Lösung von Gl. B.4 ist gerade dann effektiv, wenn die Matrix  $\mathbf{A}$  bereits in faktorisierten Form vorliegt. Dies ist insbesondere während der (modifizierten) Newton-Iteration in einem Laststeigerungsalgorithmus der Fall. Zusätzlich bietet Slang die Variante an, Gl. B.4 mit Hilfe des konjugierten Gradienten Verfahrens [18] zu lösen. Mit steigender Anzahl von zu berechnenden Eigenpaaren wird diese Variante zwar schnell unwirtschaftlich, kann jedoch für speicherintensive Probleme, sowie für Fälle für die faktorisierte Matrix nicht vorliegt, zur einzigen Alternative werden. In einem 2. Schritt werden vollbesetzte Matrizen der Dimension  $p * p$  durch folgende Matrixoperationen erzeugt.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \overline{\Phi}^{k+1T} \mathbf{A} \overline{\Phi}^{k+1} \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \overline{\Phi}^{k+1T} \mathbf{B} \overline{\Phi}^{k+1} \quad (\text{B.6})$$

Das in den Unterraum projizierte Eigenproblem lautet somit:

$$\tilde{\mathbf{A}}\Psi = \Lambda^{k+1} \tilde{\mathbf{B}}\Psi \quad (\text{B.7})$$

Mit:

$$\Psi^T \tilde{\mathbf{A}} \Psi = \Lambda^{k+1} \quad (\text{B.8})$$

$$\Psi^T \tilde{\mathbf{B}} \Psi = \mathbf{I} \quad (\text{B.9})$$

Hierbei ist zu beachten daß  $\tilde{\mathbf{B}}$  wiederum nicht notwendigerweise vollen Rang besitzen muß. Für diesen Fall kann das Unterraumproblem Gl. B.7 nicht gelöst werden. Jedoch kann eine Lösung gefunden werden, sofern eine Normalisierung der Eigenvektoren bezüglich  $\tilde{\mathbf{A}}$  vorgenommen wird. Das Unterraumproblem lautet somit:

$$\tilde{\mathbf{B}} \Psi = \Gamma^{k+1} \tilde{\mathbf{A}} \Psi \quad (\text{B.10})$$

Mit:

$$\Psi^T \tilde{\mathbf{B}} \Psi = \Gamma^{k+1} \quad (\text{B.11})$$

$$\Psi^T \tilde{\mathbf{A}} \Psi = \mathbf{I} \quad (\text{B.12})$$

Die berechneten Eigenwerte  $\Gamma$  stellen dann die Kehrwerte der gesuchten Eigenvektoren  $\Lambda$  dar.

$$\Lambda^{k+1} = \left( \Gamma^{k+1} \right)^{-1} \quad (\text{B.13})$$

Außerdem muß noch eine Umordnung der Eigenpaare vorgenommen werden, so daß  $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots \Lambda_p$  gilt. Der Anwender entscheidet bezüglich welcher Matrix die Eigenvektoren normalisiert werden. Gl. B.7 bzw. Gl.B.10 werden dann mit der LAPACK Bibliothek gelöst.

Die  $\Lambda^{k+1}$  stellen eine verbesserte Näherung für die gesuchten Eigenwerte dar. Die iterativ verbesserten Eigenvektoren ergeben sich dann zu:

$$\Phi^{k+1} = \overline{\Phi}^{k+1} \Psi \quad (\text{B.14})$$

Die so ermittelte Eigenvektoren dienen als Startvektoren für den nächsten Iterationsschritt. Der Vorgang wird so lange wiederholt bis das Konvergenzkriterium,

$$\frac{\Lambda_p^{k+1} - \Lambda_p^k}{\Lambda_p^{k+1}} < tol, \quad (\text{B.15})$$



für den größten zu berechnenden Eigenwert erfüllt ist. Als Richtlinie gilt, die Toleranzgrenze zu  $tol = 10^{-2s}$  festzulegen [9], wobei  $s$  die gewünschte Stelligkeit des Eigenwertproblems darstellt. Die auf diese Weise erhaltenen Eigenvektoren konvergieren im allgemeinen gegen die exakten Eigenvektoren. Die Berechnung der Eigenpaare bedarf somit neben der Lösung des Gleichungssystems Gl. B.4 lediglich der Matrixoperationen Gl. B.5, Gl. B.6 sowie Gl. B.14 und der Lösung des Eigenwertproblems der Dimension  $p$  (Gl. B.7 bzw. Gl. B.10). Das Verfahren kann damit effektiv auch als begleitende Maßnahme innerhalb einer nichtlinearen Strukturanalyse eingesetzt werden.

## Anhang C

### Beispiele zum Element SHELL3N

#### Platte unter einachsigen Druck bei gelenkiger Lagerung

Im folgenden Beispiel (s. Abb. C.1) werden Beulberechnung an einer ebenen, allseitig gelenkig gelagerten Platte durchgeführt und mit einer analytischen Lösung für dieses Problem ( z. B. [56]) verglichen. Für die das Beulproblem beschrei-

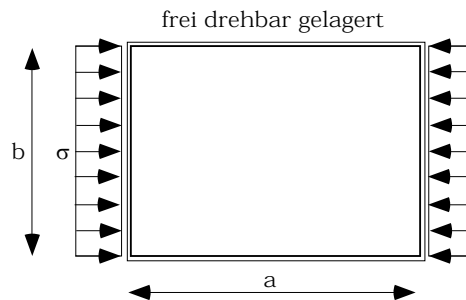


Abbildung C.1: Platte unter einachsigen Druck bei gelenkiger Lagerung

bende analytische Lösung der Differentialgleichung wird eine trigonometrische Lösungsfunktion gewählt, die die Randbedingungen erfüllt. Diese Vorgehensweise führt auf die folgende charakteristische Beulformel,

$$\sigma_k = \frac{E\pi^2}{12(1-\mu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 k \quad (\text{C.1})$$

mit  $t$  als Plattendicke und  $k$  als Beulkoeffizient, der von den Geometrieabmessungen abhängig ist.

$$k = \left( \frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 \quad (\text{C.2})$$

Zu jeder Kombination der ganzzahligen Anzahl der Halbwellen in Längs- bzw. Querrichtung,  $n$  und  $m$ , gehört ein Lösungswert. Maßgeblich ist die kleinste Spannung, die sich aus Gl. C.1 ergibt. Dies führt für ein variables Verhältnis der Kantenlängen auf die sog. Girlandenkurven.

Die FE-Berechnung wurde mit 2 Diskretisierungen durchgeführt (9\*9 und 17\*17 Knoten). Die Netze wurden parametrisiert, die Beulkoeffizienten wurden mit einem Netz für unterschiedliche Seitenverhältnisse berechnet. Die analytische Lösung berücksichtigt keine Vorverformungen. Für einen objektiven Vergleich der FE Lösung mit der analytischen Lösung wurde daher bei der FE-Berechnung ebenfalls die Vorverformungen vernachlässigt. Dazu wurde die Belastung als Lastfall “Temperaturdehnung in Längsrichtung” interpretiert. Die Beulspannung wird dann mittels des in Kap. 3.7.1 beschriebenen Indifferenzenverfahrens berechnet. Für das Seitenverhältnis  $\frac{a}{b} = 1$  stimmen die berechneten Werte auf 0.6% (9\*9 Netz) sowie 0.3 % (17\*17 Netz) mit der analytischen Lösung überein. Für den Wert  $\frac{a}{b} = 1$  sind in [82] Ergebnisse für Berechnungen ohne Vorverformungen für weitere Elementformulierungen aufgeführt. Am Wert  $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$  wechselt die Beulform. Höhere Beulmuster können entsprechend schlechter mit den gegebenen Diskretisierung wiedergegeben werden. Die Abweichungen lassen sich durch eine feinere Vernetzung verringern. In Abb. C.2 sind die Girlandenkurve der FE-Berechnung der analytischen Lösung gegenübergestellt.

Die Berechnungsergebnisse unter Berücksichtigung der Vorverformungen, die am Netz 9\*9 durchgeführt wurden, sind zum Vergleich ebenfalls in Abb. C.2 abgebildet. Für  $\frac{a}{b} = 1$  ergeben sich dann bereits 3.9 % Abweichungen gegenüber den Berechnungen ohne Vorverformungen!

### “ Verzerrung” von Elementen

Als Beispiel das die Insensitivität des Platten-Membran-Elements bezüglich einer Verzerrung der Elementgeometrie demonstrieren soll, wird ein Kragträger unter Einzellast berechnet. Das Modell ist mit 20 gleichen Dreieckselementen diskretisiert, die Platte ist an den Knoten 1, 12, 14 eingespannt, vgl. Abb. C.3. An den Knoten 6, 7, 18 wirkt eine Belastung in  $z$ -Richtung. Die Elementabmaße in

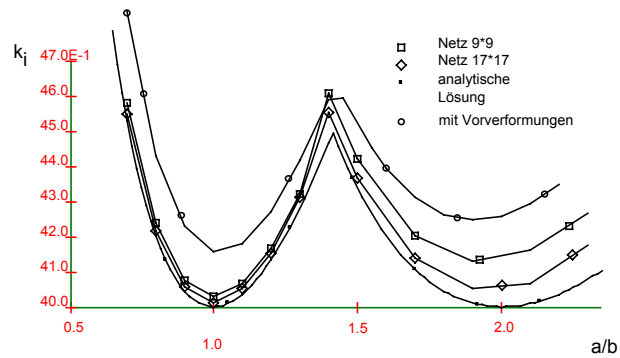


Abbildung C.2: Girlandenkurve für analytische - und FE-Berechnung

$x$ -Richtung sind variabel, so daß der Einfluß des Seitenverhältnisses der Elemente auf das Ergebnis untersucht werden kann. Die Lösung wird jeweils mit der analytischen Lösung nach der Balkentheorie verglichen. In der Berechnung wurde dabei das Seitenverhältnis von 1:1000 bis 1000:1 variiert. Abb. C.3 zeigt die verformte Struktur bei einem Seitenverhältnis von 1:1. Abb. C.4 zeigt das Verhältnis der analytischen Lösung nach Balkentheorie zur FE-Lösung gegenüber dem Logarithmus des Elementseitenverhältnisses auf.

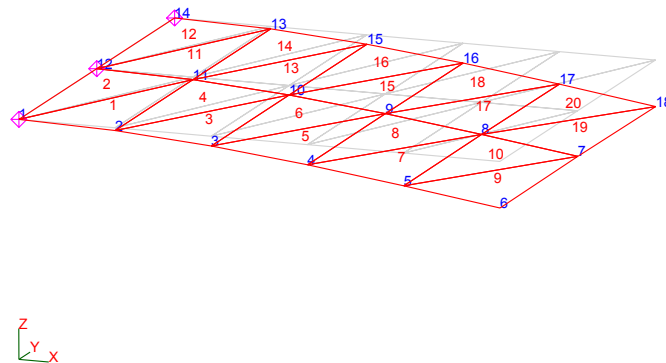


Abbildung C.3: FE-Berechnung bei einem Elementseitenverhältnis von 1:1

Die Ergebnisse sind für Seitenverhältnisse von 1:3 bis 200:1 nahezu konstant. Für größere Elementverzerrungen bis zum Faktor 1000:1 ergeben sich im berechneten

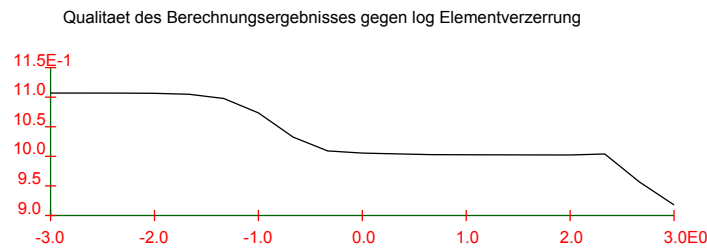


Abbildung C.4: Qualität der Lösung gegenüber log. des Verhältnisses der Seitenlängen

Bereich maximale Abweichungen von lediglich 8%. Für sehr kleine Seitenverhältnisse bis 1:1000 liegt die maximale Abweichung gegenüber der analytischen Balkenlösung bei 11%. Schubeinflüsse sind dabei weder bei der analytischen noch bei der FE-Lösung berücksichtigt worden.

## Anhang D

### Beulanalyse einer Eisenbahnbrücke

Eine bereits vormontierte Stahlfachwerkbrücke (Abb. D.1 und Abb. D.2) soll wie in Abb. D.3 dargestellt eingeschoben werden.

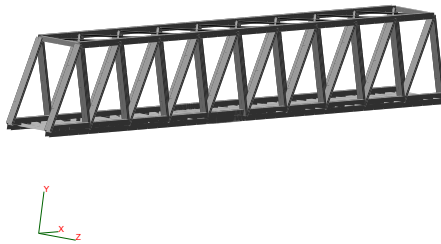


Abbildung D.1: Stahlfachwerkbrücke

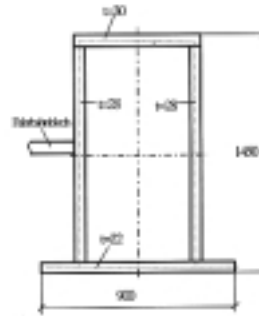


Abbildung D.2: Querschnitt des Brückenuntergurtes [37]

Dabei liegt während des Montagevorganges kurzzeitig das gesamte Eigengewicht der Brücke auf den sog. Verschußsattel (Abb. D.4). Es stellt sich die Frage, ob ein Versagen der Brückenuntergurte (Abb. D.2) durch Stabilitätsverlust während der Montage ausgeschlossen werden kann.

Zur Berechnung wurde die gesamte Brücke (Obergurte, Unter gurte, Streben und Fahrbahn) durch ein FE-Modell (533 Knoten und 1102 Elemente) abgebildet (Abb. D.5). Der mittlere Bereich eines Unter gurtes wurde mit geometrisch nichtlinearen SHELL3N Platten-Membranelementen modelliert (Abb. D.6), die restlichen

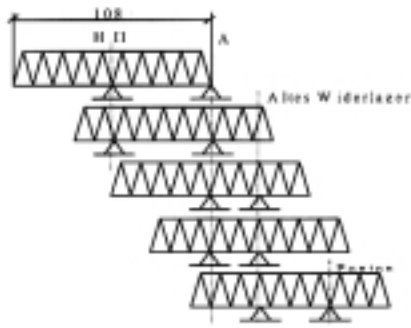


Abbildung D.3: Montagesystem der Brücke [37]

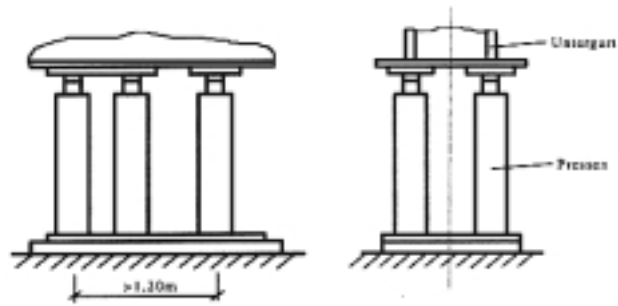


Abbildung D.4: Verschubsattel zur Montage [37]

Komponenten mit geometrisch nichtlinearen Balkenelementen. Die Untergurte sind in gleichen Abständen mit Schotten verstärkt. Die Kopplung der Balken mit den Platten-Membranelementen erfolgt an solchen Schotten. Dabei wird von einem Ebenbleiben der Querschnitte ausgegangen. Mit dem Modell gelingt es, die Massen- und Steifigkeitsverhältnisse an der gesamten Struktur näherungsweise und im für das Beulproblem ausschlaggebenden Bereich relativ genau abzubilden. Eine Ermittlung von Schnittgrößen und deren Einleitung in eine Schalenstruktur, wie in [37] durchgeführt, entfällt somit.

Das Tragwerk ist während der Montage durch Eigengewicht belastet. Die Brücke ist am rechten Rand gelenkig gelagert. Die Verschubsattel wurden symmetrisch in Brückenmitte angenommen. Im Bereich der Verschubsattel wurden unterhalb der vertikalen Gurtbleche die vertikalen Verschiebungen behindert. Der kritische Lastfaktor  $\lambda_{krit}$  wird mit Indifferenzenverfahren erster und zweiter Ordnung ermittelt. Zu Kontrollzwecken wird eine Laststeigerung bis zum Stabilitätsversagen durchgeführt. In Tab. D.1 sind die Berechnungsergebnisse und die benötigten Rechenzeiten aufgeführt.

	lineares Eigenwert- problem	quadrat. Eigenwert- problem	Pfad- verfolgung	DAS 012
$\lambda_{krit}$	6.31	6.26	6.25	1.4
$t_{calc}[h]$	0.15	0.3	5	-

Tabelle D.1: Ergebnisse der Beulberechnung

Abb. D.5 zeigt die verformte Struktur, Abb. D.6 die Beulform. Wie erwartet tritt

lokales Beulen unterhalb des Verschiebesattels auf. Mit den ermittelten kritischen Lasten muß ein Versagen des Tragwerks durch Stabilitätsverlust bei den gegebenen Montagebedingungen nicht befürchtet werden. Die Beulbemessung an der

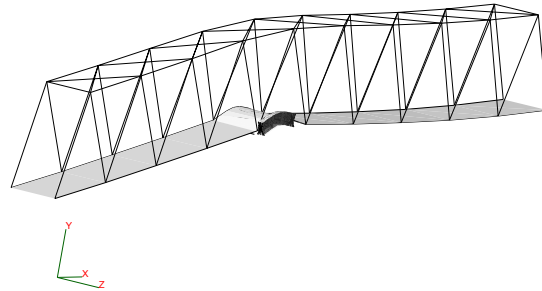


Abbildung D.5: Verformte Struktur (200-fach überhöht)

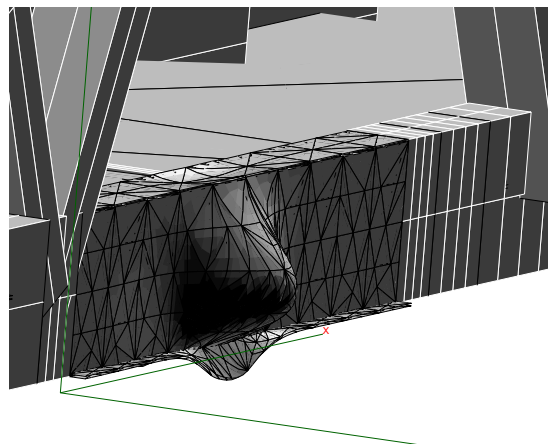


Abbildung D.6: Beulform der Struktur

Gesamtstruktur liefert wesentlich höhere kritische Lasten als die Berechnung nach DAST 012, s. auch [37]. Die Indifferenzenverfahren erweisen sich zur Ermittlung der kritischen Last in der Rechenzeit erheblich günstiger als eine Verfolgung des Lösungspfad bis zum singulären Punkt.



# **Erklärung**

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Weimar, 30. Oktober 1996

# Lebenslauf

PERSONALIEN	Name:	Schorling
	Vorname:	York
	Geburtsdatum:	27. November 1965
	Geburtsort:	Aachen
	Familienstand:	ledig
	Staatsangehörigkeit:	deutsch
SCHULBILDUNG	1971 – 1975	Grundschule in Feldkirchen-Westerham
	1975 – 1985	Gymnasium Bad Aibling in Bad Aibling
STUDIUM	1985 – 1991	Studium an der TU München, Fachbereich Maschinenwesen, Schwerpunkt Luft und Raumfahrt
BERUFLICHE TÄTIGKEIT	Jul. 91	Abschluß: Dipl.-Ing.
	1992 – 1995	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Institut für Mechanik, Universität Innsbruck.
	1995 –	Wissenschaftlicher Mitarbeiter, Institut für Strukturmechanik, Bauhaus-Universität Weimar